On qualifiera de *plan* l'ensemble des points « de votre feuille », de mon « tableau ».

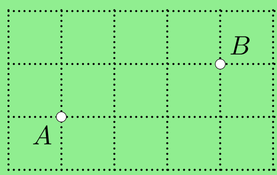
I Définitions

I.1 Vecteur

Définition : Soit A et B deux points du plan.

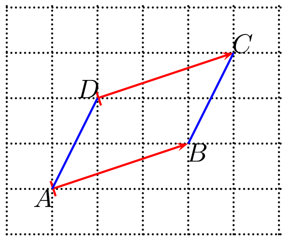
- la droite (AB) définit une *direction*. Toute droite parallèle à (AB) a la même direction que la droite (AB).
- la demi-droite $[AB)$ définit un *sens*. Il est différent de celui de la demi-droite $[BA)$.
- le segment $[AB]$ admet une longueur (si une unité est définie) qui se note AB.

Ces trois notions *direction*, *sens* et *longueur* sont regroupées dans un ***nouvel* objet mathématique** appelé *vecteur* AB et il se note $\overrightarrow{AB}$.
A est l'origine et B l'extrémité du vecteur.

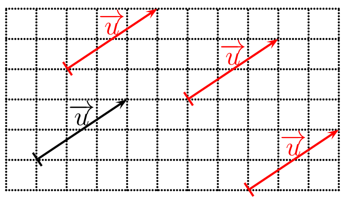


Dans la situation ci-contre :

On remarque que :
- (AB) et (DC) sont parallèles, elles ont la même direction ;
- $[AB]$ et $[DC]$ sont de même longueur, ce qui s'écrit $AB = DC$;
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont dans le même sens ;
- $ABCD$ est un parallélogramme.



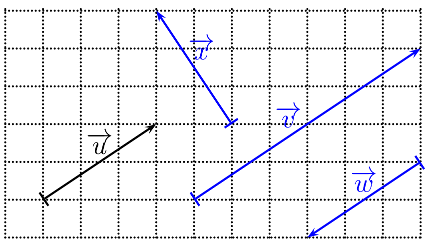
Remarque 1 Ce qui est important pour un vecteur n'est pas l'endroit où le dessine mais les propriétés dont ils disposent (***direction***, ***sens*** et longueur (***norme***)). Lorsque l'on dessine un vecteur, on dit que l'on trace un représentant du vecteur. On peut nommer un vecteur par une seule lettre « minuscule » sans utiliser le point *origine* ou le point *extrémité* : par exemple $\overrightarrow{u}$.



I.2 Égalité de vecteurs

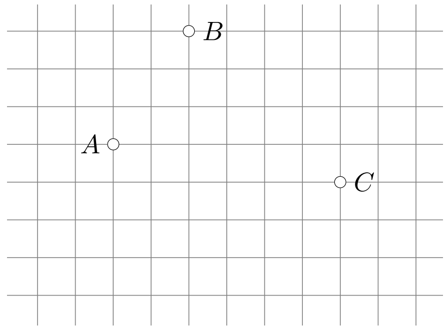
Définitions
- Deux vecteurs sont <u>égaux</u> si et seulement si ils ont la même direction, le même sens et la même norme.
- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont <u>égaux</u> si et seulement si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (éventuellement aplati). On note alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Aucun des vecteurs ci-contre ne sont égaux deux à deux. certaines paires disposent pourtant de caractéristiques communes.



EXERCICE 1 Sur la figure ci-contre :

1. Construire, à partir des points A, B et C, les points D, E et F tels que :
   $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA}$
2. Quels parallélogrammes peut-on tracer avec ces six points ?
3. En utilisant ces six points, compléter :
   $\overrightarrow{BD} = \dots\dots = \dots\dots$ $\overrightarrow{BC} = \dots\dots$ $\overrightarrow{BF} = \dots\dots$
4. Quelles autres égalités de vecteurs peut-on déduire ?



Propriété : A, B et I sont des points du plan.

Le point I est le milieu du segment $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

EXERCICE 2 :

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Construire :
   - le point N tel que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BC}$;
   - le point P tel que $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{BC}$;
   - le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$;
2. Prouver que A est le milieu de $[NP]$, B celui de $[PM]$ et C le milieu de $[MN]$.

Remarque 2 :

- Il existe le vecteur nul noté $\overrightarrow{0}$, sa norme vaut 0 et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $A = B$,
- Si on fixe un point O, alors pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point M vérifiant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$. ($\overrightarrow{OM}$ est un représentant de $\overrightarrow{u}$)

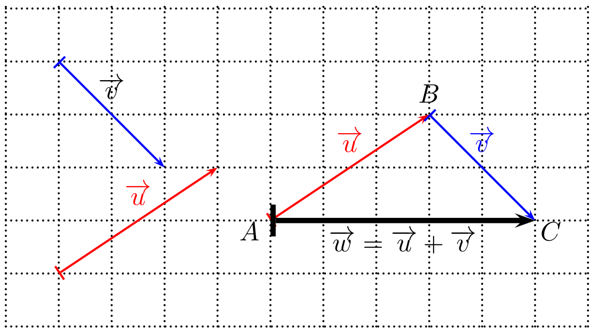
II Somme de deux vecteurs

II.1 Principe

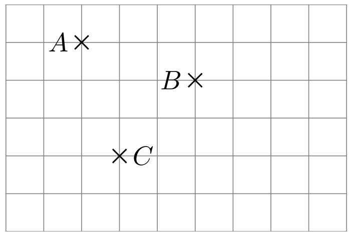
Définition : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, on définit le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ de la façon suivante :

Soit A un point du plan, on trace le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'origine A : il a pour extrémité B, puis on trace le représentant de $\overrightarrow{v}$ d'origine B : il a pour extrémité C.

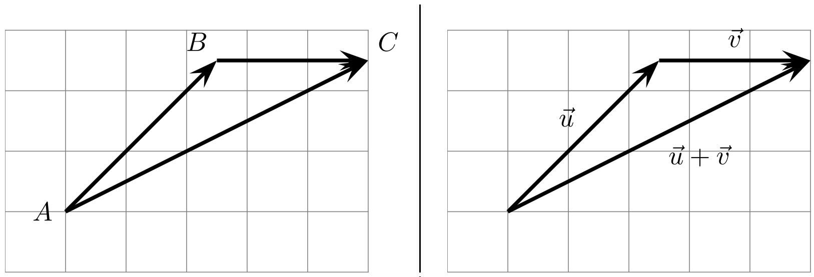
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{w}$.



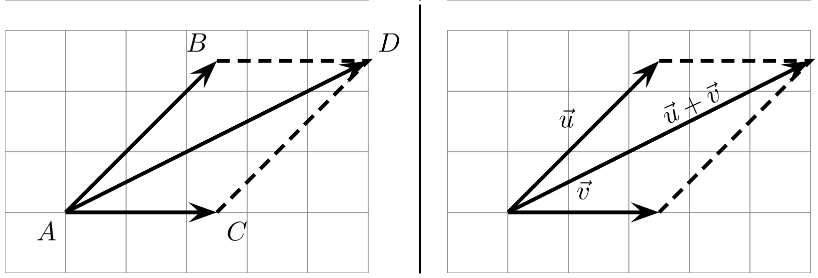
EXERCICE 3 Construire ci-dessous un vecteur égal à $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.



Relation de Chasles : Pour tous points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



Règle du parallélogramme :
Pour tous points A, B, C et D on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow ABCD$ parallélogramme.

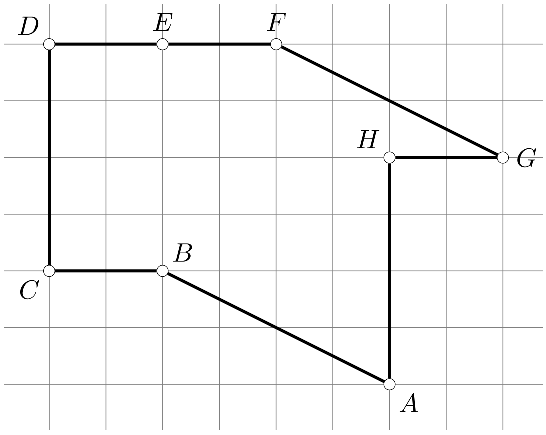


EXERCICE 4 Compléter à l'aide de la relation de CHASLES :

- $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{B\ldots}$
- $\overrightarrow{XK}=\overrightarrow{XL}+\overrightarrow{\ldots K}$
- $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{\ldots A}+\overrightarrow{A\ldots}$
- $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{\ldots P}+\ldots\ldots$
- $\overrightarrow{\ldots E}=\overrightarrow{F\ldots}+\overrightarrow{G\ldots}$
- $\overrightarrow{H\ldots}=\ldots\ldots+\overrightarrow{IJ}$
- $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{R\ldots}+\overrightarrow{\ldots S}$
- $\ldots\ldots=\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{\ldots M}$
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\ldots\ldots$
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\ldots C}+\overrightarrow{\ldots D}+\ldots\ldots$
- $\overrightarrow{\ldots Y}=\overrightarrow{XJ}+\ldots\ldots+\overrightarrow{R\ldots}$

EXERCICE 5 On considère le motif représenté ci-dessous.

1. Citer tous les vecteurs égaux :
   (a) au vecteur $\overrightarrow{AB}$ et représentés sur ce motif ;
   (b) au vecteur $\overrightarrow{FE}$ et représentés sur ce motif.
2. En n'utilisant que les lettres représentées sur ce motif, déterminer un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}$.
3. En n'utilisant que les lettres représentées sur ce motif, déterminer un vecteur égal aux vecteurs suivants :
   (a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}$
   (b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$
   (c) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}$
   (d) $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{GF}$
   (e) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FB}$



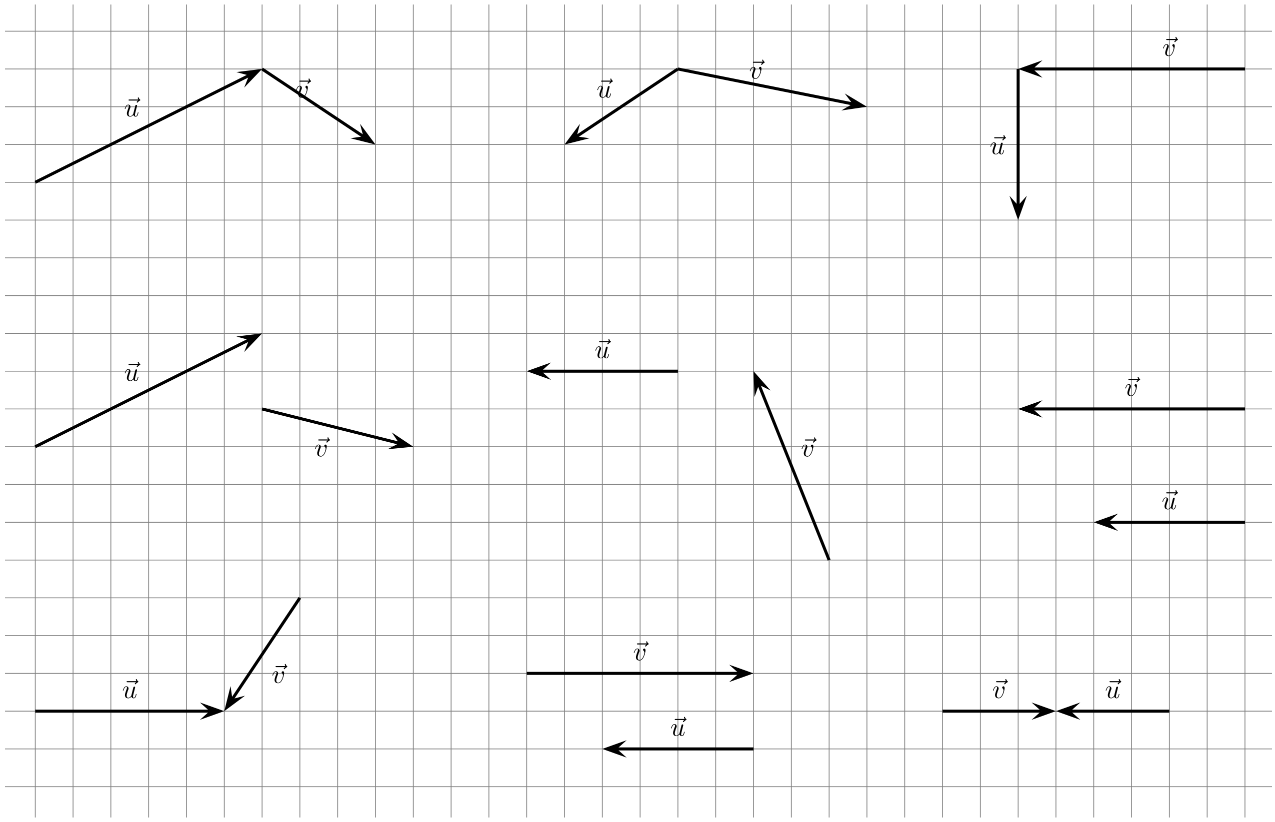
II.2 Vecteurs opposés

Définition : On appelle *vecteurs opposés* tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$. On peut noter $\vec{u}=-\vec{v}$ ou $\vec{v}=-\vec{u}$.

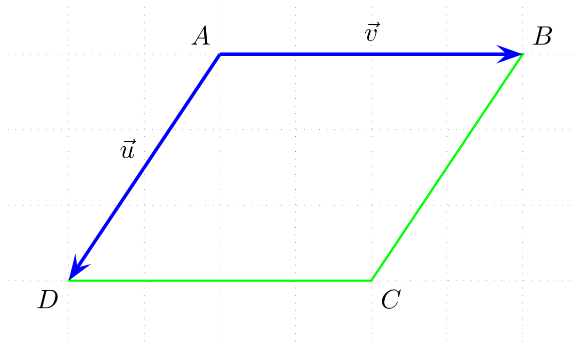
D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. On a donc :

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés. On a donc $\overrightarrow{AB} =$ ....et $\overrightarrow{BA} =$ ....

EXERCICE 6 Dans chacun des cas, construire en couleur le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Que remarque-t-on dans le dernier cas ?



EXERCICE 7 Étant donné le parallélogramme $ABCD$, on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.



Écrire les vecteurs suivants à l'aide des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ *seulement* :

- $\overrightarrow{BA} =$ ....;
- $\overrightarrow{DA} =$ ....;
- $\overrightarrow{CB} =$ ....;
- $\overrightarrow{DC} =$ ....;
- $\overrightarrow{AC} =$ ....;
- $\overrightarrow{CD} =$ ....;
- $\overrightarrow{CA} =$ ....;
- $\overrightarrow{DB} =$ ....;
- $\overrightarrow{BD} =$ ....;
- $\overrightarrow{BC} =$ ....;

Propriété : Soient A et B deux points distincts et I un point du plan.
Alors .... $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

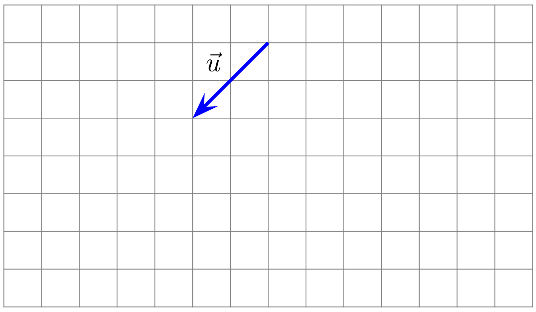
III Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

III.1 Activité

Sur la figure ci-contre :

1. Construire un représentant du vecteur $\vec{v} = \vec{u} + \vec{u}$ et $\vec{w} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$.
   Quelles propriétés géométriques partagent $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$?
   Quelles sont leurs différences ?

2. On notera $\vec{v} = 2\vec{u}$ et $\vec{w} = 3\vec{u}$.
   En vous inspirant du point précédent, conjecturer une représentation du vecteur $\vec{\imath} = -2\vec{u}$ et du vecteur $\vec{\jmath} = 1,5\vec{u}$.



Soit k un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Alors le vecteur $k\vec{u}$ est un vecteur dont :

- la direction est ....
- le sens est ....
- la norme est ....

III.2 Activité

On a reproduit ci-dessous deux fois la même figure.
Sur la figure 1, construire le vecteur $3\,(\vec{u} + 2\vec{v})$ et, sur la figure 2, construire le vecteur $3\vec{u} + 6\vec{v}$. Que remarque-t-on ?

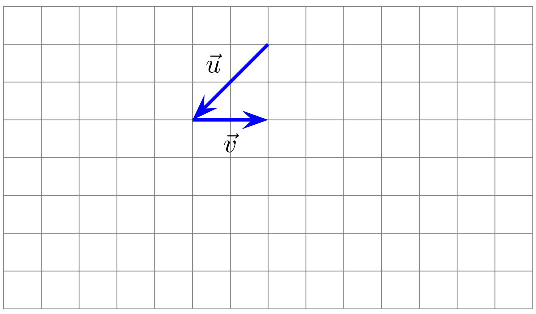


figure 1

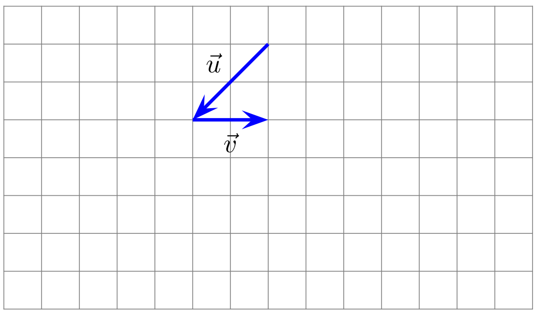


figure 2

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous nombres réels k et k' :

- $k\,(\vec{u} + \vec{v}) =$ ....
- $k\vec{u} + k'\vec{u} =$ ....
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout nombre k, $0\vec{u} =$ ....et $k\vec{0} =$ ....

Et enfin, une autre propriété **caractéristique** du milieu d'un segment :

Soient A et B deux points distincts et I un point du plan.

Alors I milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} =$ ....$\overrightarrow{AB}$.

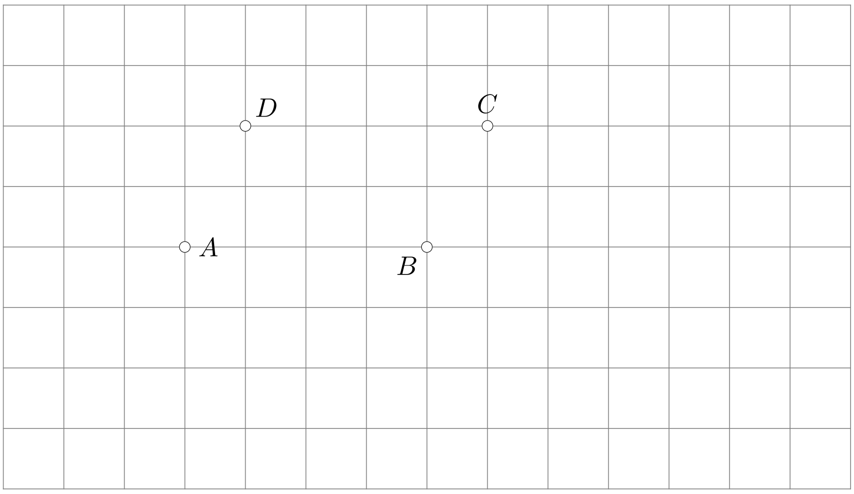
IV Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* s'il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont la même direction.

Remarque 3 Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $0\vec{u} = \vec{0}$.

EXERCICE 8 Sur la figure ci-dessous le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
On appelle E le symétrique de D par rapport à C et F le symétrique de D par rapport à A.



1. Construire E et F.
2. Compléter les enchaînements de relations vectorielles suivantes en utilisant les propriétés vues précédemment dans la leçon :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{FB} &\underset{Chasles}{=} \overrightarrow{F\ldots} + \overrightarrow{\ldots B} \\
&\underset{milieu}{=} \ldots\overrightarrow{F\ldots} + \overrightarrow{D\ldots} \\
&= \ldots\overrightarrow{F\ldots} + \ldots\overrightarrow{D\ldots} \\
&= \ldots(\ldots\ldots + \ldots\ldots) \\
&= \ldots\overrightarrow{F\ldots}
\end{aligned}$$

Quelle conclusion s'impose pour les vecteurs $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{FE}$? Démontrer que les points F, B et E sont alignés.

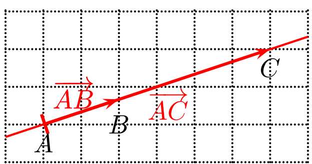
3. Même protocole que précédemment :

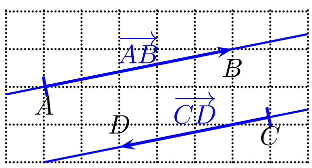
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{FB} &\underset{Chasles}{=} \overrightarrow{F\ldots} + \overrightarrow{\ldots B} \\
&\underset{milieu}{=} \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{D\ldots} \\
&\underset{Chasles}{=} \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Démontrer que les droites (AC) et (FE) sont parallèles.

On peut donc écrire :

- Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires,
- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.





V Exercices

EXERCICE 9 $ABCD$ est un quadrilatère quelconque. I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1. Montrer, à l'aide de la relation de CHASLES, que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer, à l'aide de la relation de CHASLES, que $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire la nature du quadrilatère $IJKL$.

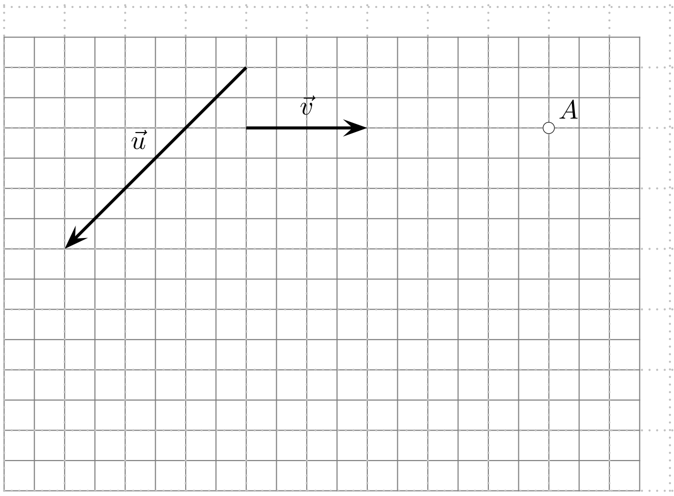
•○•○•

EXERCICE 10 Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati et les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{DC}$. Montrer que les segments $[EF]$ et $[BD]$ ont même milieu.

•○•○•

EXERCICE 11 On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de directions différentes. A est un point donné.

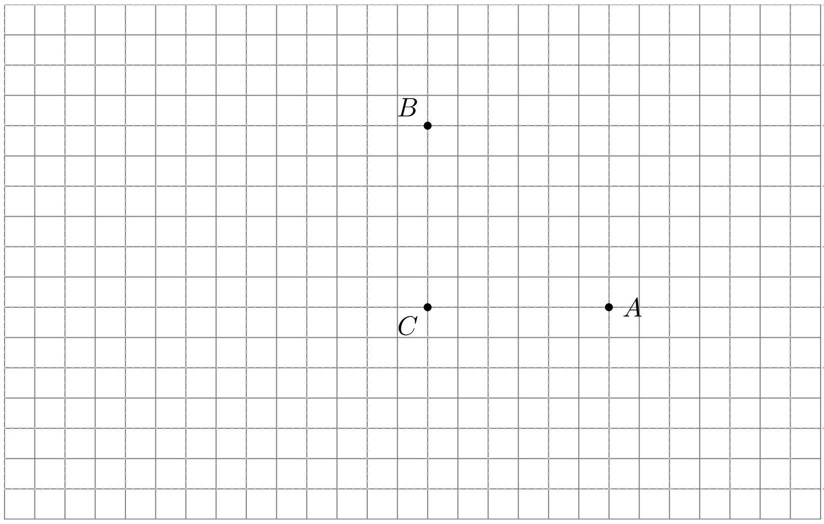
1. Construire les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{u} - \vec{v}$.
2. Construire les points P, Q et R tels que $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\vec{u}$, $\overrightarrow{PQ} = -2\vec{v}$ et $\overrightarrow{QR} = -\frac{2}{3}\vec{u}$.
3. Que constate-t-on ? *Le justifier par un calcul sur les vecteurs.*



•○•○•

EXERCICE 12 Soit un triangle rectangle ABC en C tel que $AC = 3\,\text{cm}$ et $BC = 3\,\text{cm}$.

1. Placer les points I, J, K et L définis par les égalités suivantes :
   - $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
   - $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BA}$;
   - $\overrightarrow{CK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$;
   - $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{13}{6}\overrightarrow{BA}$.
2. Tracer le quadrilatère $IJKL$. Que peut-on conjecturer sur sa nature ?
3. Nous allons démontrer la conjecture faite au point précédent.
   (a) À l'aide de la relation de CHASLES, exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ}$.
   En déduire $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
   (b) À l'aide de la relation de CHASLES, exprimer $\overrightarrow{LK}$ en fonction de $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{CL}$.
   Toujours à l'aide de la relation de Chasles, travailler l'expression précédente jusqu'à obtenir $\overrightarrow{LK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
   (c) Conclure.



EXERCICE 13 Écrire les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ et $\vec{t}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

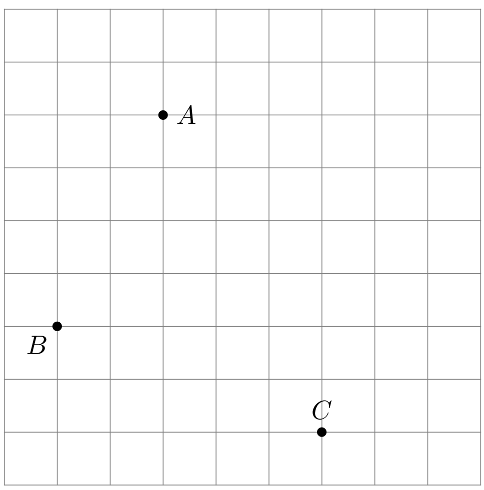
- $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
- $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{BC}$.
- $\vec{w} = \dfrac{2}{5}\left(\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CA}$.
- $\vec{x} = -\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.
- $\vec{t} = 2\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

EXERCICE 14 Soit ABC un triangle non aplati (A, B et C non alignés) et les points D et E tels que :

$\overrightarrow{AD} = \dfrac{5}{2}\overrightarrow{AC} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

1. Faire un dessin. Conjecturer le lien entre les points B, D et E.
2. Nous allons démontrer la conjecture du point précédent.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{ED}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}$ puis en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (c) Conclure.

EXERCICE 15 Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle quelconque. On définit trois points D, E et F par : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. On appelle, par ailleurs, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.



1. Construire D, E, F, I et J.
2. Montrer, si possible à l'aide des vecteurs, que les droites (DE) et (BF) sont parallèles.
3. Montrer, si possible à l'aide des vecteurs, que les points I, E et D sont alignés.
4. Montrer, si possible à l'aide des vecteurs, que les points B, F et J sont alignés.