- Soit $(u_n)_{n\geqslant 3}$ la suite définie par $\boxed{u_n = \dfrac{n-1}{n-2}}$. Calculer les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
- Soit $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\boxed{\begin{cases} w_{n+1} = \dfrac{1}{3}w_n + \dfrac{2}{3} \\ w_0 = 2 \end{cases}} \qquad \text{Calculer } w_1, w_2, w_3 \text{ et } w_4.$$

Conjecturer le « comportement » des termes de la suite lorsque le rang n prend des termes de plus en plus grand.

• ○ • ○ •

- La suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ avec $u_n = \dfrac{n-1}{n-2}$ est définie de façon « explicite » donc le calcul des termes est un simple « calcul d'images »

$$u_3 = \frac{3-1}{3-2} = \boxed{2}, \quad u_4 = \frac{4-1}{4-2} = \boxed{\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad u_5 = \frac{5-1}{5-2} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

Au regard des trois premiers termes de la suite, il semblerait que les termes « diminuent », ce que l'on traduira par $(u_n)_{n\geqslant 3}$ semble décroissante.

Comme $u_n = u(n)$ avec

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} - \{0,1,2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto \frac{n-1}{n-2} \end{aligned}$$

il est naturel d'étudier les variations de la fonction

$$\begin{aligned} f : [3;+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x-1}{x-2} \end{aligned}$$

Soit $3 \leqslant a < b$, on évalue le signe de $f(a) - f(b)$:

$$f(a) - f(b) = \frac{a-1}{a-2} - \frac{b-1}{b-2} = \frac{(a-1)(b-2)-(a-2)(b-1)}{(a-2)(b-2)} = \frac{b-a}{(a-2)(b-2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ a \geqslant 3 \Rightarrow a-2>0 \\ \bullet\ b \geqslant 3 \Rightarrow b-2>0 \\ \bullet\ b > a \Rightarrow b-a>0 \end{array}\right\}$$ donc $f(a) - f(b) > 0 \Leftrightarrow f(a) > f(b)$ alors que $3 \leqslant a < b$, la fonction f est donc décroissante sur $[3;+\infty[$.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ a le même sens de variation, elle est décroissante (on ne précise par sur $\mathbb{N} - \{0,1,2\}$, c'est sous-entendu)

- La suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par récurrence :

$\triangleright$ $w_1 = \dfrac{1}{3}w_0 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \times 2 + \dfrac{2}{3} = \boxed{\dfrac{4}{3}}$

$\triangleright$ $w_2 = \dfrac{1}{3}w_1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9} + \dfrac{2}{3} = \boxed{\dfrac{10}{9}}$

$\triangleright$ $w_3 = \dfrac{1}{3}w_2 + \dfrac{2}{3} = \boxed{\dfrac{28}{27}}$ et $w_4 = \boxed{\dfrac{82}{81}}$

La procédure calculatrice Casio : $\boxed{2}$ $\boxed{\text{enter}}$ puis $\boxed{\dfrac{1}{3}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\dfrac{2}{3}}$ puis $\boxed{\text{enter}}$ plusieurs fois, permet de calculer les termes consécutifs de la suite.
Pour une TI, remplacer $\boxed{\text{Ans}}$ par $\boxed{\text{Rep}}$.

On constate que, lorsque les rangs « augmentent », les termes décroissent en se rapprochant de 1. A ce stade, impossible d'en dire plus et cela reste une conjecture ; en effet, nous ne disposons pas des outils mathématiques nécessaires pour le démontrer. (si l'on cherche bien, on doit pouvoir en trouver)

On dit la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ admet le nombre 1 comme limite et cela s'écrit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, aucun terme w_n n'est égal à 1, mais l'on peut trouver un terme w_n aussi « proche » de 1 que l'on veut.

Exemple 1 La formule explicite pour le calcul des termes de la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ est : $w_n = \dfrac{3^n+1}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$.