**EXERCICE 1** :

***Les parties** $A$ **et** $B$ **sont indépendantes.***
Un site internet propose des jeux en ligne.

## Partie A

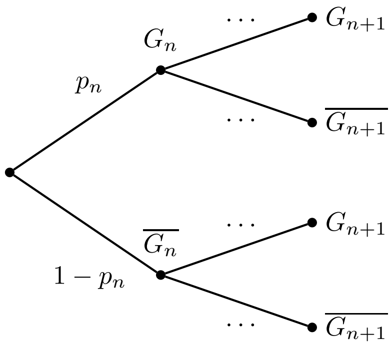
Pour un premier jeu :

▷ Si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à $\frac{2}{5}$.

▷ Si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est égale à $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul $n$, on désigne par $G_n$ l'événement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note $p_n$ la probabilité de événement $G_n$.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Compléter sur ce document l'arbre pondéré suivant :




2. Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

3. Pour tout $n$ entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.

   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_1$ à préciser.

   (b) Montrer que, pour tout $n$ entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.

   (c) Déterminer la limite de $p_n$.

   (d) Démontrer que la suite $(p_n)$ est décroissante.

   (e) **Algorithmique** On désire savoir à partir de combien de parties jouées, la probabilité que l'internaute gagne la nième partie est inférieure ou égale à $0,251$. L'algorithme qui suit, une fois complété, répond à cette question.

| | |
|---|---|
| *Variables* : | $p$ est un nombre réel et $n$ est un nombre entier naturel. |
| *Initialisation* : | Affecter à $p$ la valeur 1. |
| | Affecter à $n$ la valeur 1. |
| *Traitement* : | Tant que ......... |
| | │ Affecter à $n$ la valeur ......... |
| | │ Affecter à $p$ la valeur $\frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$. |
| | Fin de Tant que. |
| *Sortie* : | Afficher $n$. |

Compléter l'algorithme sur ce document et donner la valeur de $n$ qu'il affiche une fois éxécuté.

## Partie B

Désormais, le joueur doit effectuer 10 parties d'un même jeu. On suppose que toutes les parties sont indépendantes.
La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$.
Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1(a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire $X$ ? Justifier.

(b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne 4 parties ? Qu'il gagne au moins une partie ? Les résultats seront arrondis à $10^{-3}$ près.

(c) Calculer l'espérance de $X$. Interpréter ce résultat.

2. Le joueur doit payer 30€ pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8€.

(a) Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.

(b) Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40€ ? Le résultat sera arrondi à $10^{-5}$ près.