EXERCICE 1 :
Calculer les quatre premiers termes des suites définies par leur formule explicte.

1. ▷ Pour tout entier naturel n, $u_n = 3n^2 - n + 2$;
   ▷ Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{2n+3}{n}$;
   ▷ Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $w_n = \sqrt{n-2}$;

2. Pour chacune de ces suites, calculer u_{n+1}.

• ◯ • ◯ •

EXERCICE 2 :
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par $u_n = (n+2)^2$.

Démontrer que $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$ pour tout entier naturel n.

• ◯ • ◯ •

EXERCICE 3 :
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{2n}{n+1}$.

1. Conjecturer un intervalle contenant l'ensemble des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Démonter que, pour tout entier naturel n, on a

$$u_n - 2 = -\frac{2}{n+1}$$

   En déduire la démonstration de la conjecture.

• ◯ • ◯ •

EXERCICE 4 :
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{2}{4n^2+8n+3}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3}$.
2. En déduire l'expression de $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
3. Conjecturer, voire démontrer, la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

• ◯ • ◯ •

EXERCICE 5 :
On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = 3u_n + \dfrac{1}{u_n}$ et $u_0 = 1$ est à termes strictement positifs.

1. **Hors programme** : démontrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. On construit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$. Démontrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v_{k+1} - v_k \leqslant \frac{1}{3^{k+1}}$$

   Quel est le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Déduire de la question précédente que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n - v_0 \leqslant \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

   Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant \dfrac{3}{2}$ (on dit alors que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\dfrac{3}{2}$). Que peut-on en déduire pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$\boxed{\text{Une formule : pour tout } q \neq 1,\ 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}}$

$\boxed{\text{Un théorème : toute suite croissante et majorée converge.}}$