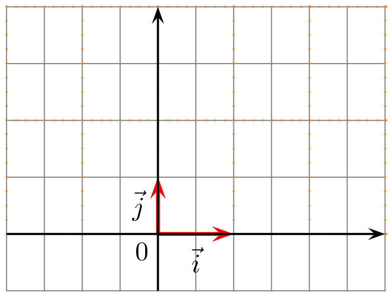
I Aire sous la courbe d'une fonction en escalier

Soit f une fonction définie par :

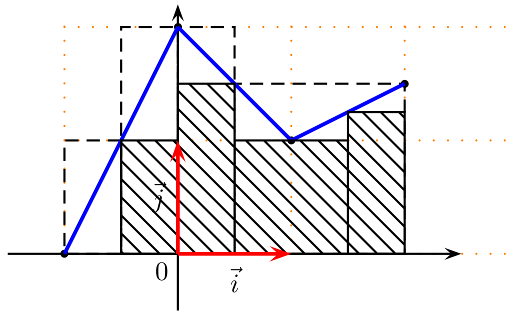
$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in\left[-2;-\frac{1}{2}\right[\\ \frac{5}{2} & \text{si } x\in\left[-\frac{1}{2};2\right[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x\in[2;3] \end{cases}$$



Tracer la courbe C_f représentant f et calculer l'aire du domaine situé sous la courbe entre l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-2$ et $x=3$.

II Aire sous la courbe d'une fonction affine par morceaux

f est une fonction affine par morceaux représentée ci-contre. C_f est la courbe représentative de f sur $[-1;2]$.

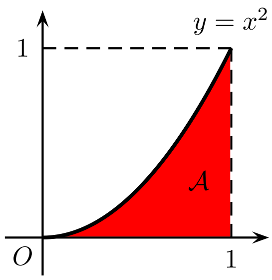


On note A_D l'aire du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équations $x=-1$ et $x=2$.

1. En utilisant les rectangles hachurés, donner la valeur de l'aire A_m qui minore A_D ($A_m < A_D$).
2. En utilisant les rectangles en pointillés, donner la valeur de l'aire A_M qui majore A_D ($A_M > A_D$).
3. En utilisant des triangles et des trapèzes, calculer la valeur exacte de A_D.

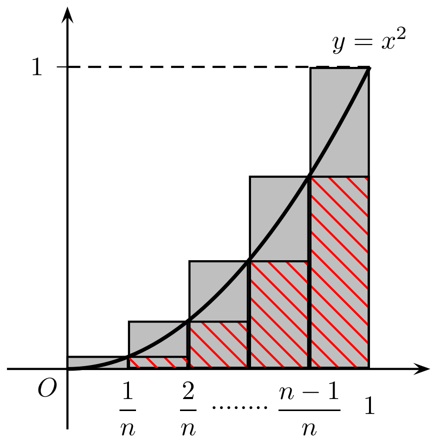
III Aire sous la courbe de la fonction carré entre 0 et 1

Il s'agit de calculer l'aire $\mathcal{A}$



pré-requis :

$$1^2+2^2+....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



Soit n un entier ($n\geqslant 1$). On partage le segment $[0,1]$ en n segments de longueur $\frac{1}{n}$.
On construit des rectangles comme sur le schéma ci-contre et on appelle :

- i_n la somme des aires des rectangles construits au-dessous de la courbe (hachurés)
- s_n la somme des aires des rectangles construits au-dessus de la courbe (coloriés)

Quel encadrement de $\mathcal{A}$ peut-on écrire ?

1. En utilisant le pré-requis, donner l'expression de i_n en fonction de n.
2. Par des considérations graphiques, en déduire l'expression de s_n en fonction de i_n et de n.
3. En utilisant l'encadrement de $\mathcal{A}$ et un théorème important, donner la valeur de $\mathcal{A}$.

Remarque 1 On pourrait démontrer également que (i_n) est croissante et
' que (s_n) est décroissante.