Utilisation d'une fonction auxiliaire, utilisation du taux d'accroissement. Étude d'une fonction trigonométrique.

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$$

et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Étude d'une fonction auxiliaire

On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction g, et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude $0,1$.
2. Préciser le signe de $g(x)$ delon les valeurs de x.

Étude de f

1. Calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f.
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis dresser le tableau de variations de f.

Asymptote à $\mathcal{C}_f$ et tangentes

1. Montrer qu'il existe 4 réels a, b, c et d tels que
$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$$
2. On considère la droite Δ d'équation $y = x$. Étudier les positions relatives de Δ et de $\mathcal{C}_f$ (on portera une attention particulière à un rapprochement éventuel des deux courbes).
Vérifier en particulier que Δ et $\mathcal{C}_f$ se coupent en un unique point A.
3. Déterminer les abscisses des points B et B' de $\mathcal{C}_f$ admettant une tangente parallèle à Δ.
4. Vérifier que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$; en déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$.

• ○ • ○ •

EXERCICE 2 : Soit $f(x) = \cos(x) - \cos^2(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f(-x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, calculer $f(x + 2\pi)$ et $f(x + \pi)$. La fonction f est-elle périodique ?
3. Étudier les variations de f sur $[0; \pi]$ et dresser le tableau de variations.
4. Tracer la représentation graphique de f sur $[0; \pi]$ en plaçant les points d'abscisses $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ et π avec leurs tangentes.
5. En déduire le tracé de $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi; \pi]$.

• ○ • ○ •

EXERCICE 3 : Dans les exemples qui suivent, étudier la limite de f au point a considéré en remarquant que $f(x)$ est le taux d'accroissement d'une fonction g, dérivable en a.

1. $f(x) = \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$; $a = 0$.
2. $f(x) = \dfrac{\sin(5x)}{x}$; $a = 0$.
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 6} - 3}{x - 3}$; $a = 3$.
4. $f(x) = \dfrac{(x + 2)^4 - 16}{x}$; $a = 0$.