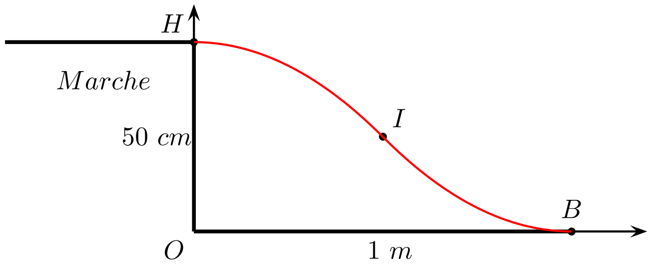
On veut installer une rampe métallique en pente douce permettant à des chariots de franchir une marche.



La figure ci-dessus représente une vue en coupe de la rampe. La hauteur OH de la marche est 50 cm et la distance $OB = 1$ m. La rampe doit satisfaire aux conditions suivantes :

- Elle est tangente au sol en B ; (C_1)
- Elle est tangente au sommet de la marche en H. (C_2)

Le but de ce travail dirigé est de trouver des fonctions dont les courbes représentatives ont l'allure de la rampe et satisfont aux conditions (C_1) et (C_2).

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ (d'unité graphique 10 cm), les points B et H ont respectivement pour coordonnées $(1; 0)$ et $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

I Raccordement avec deux arcs de parabole

1. (a) Pourquoi une parabole ne convient-elle pas ?
   (b) On va chercher, si elle existe, une courbe formée de deux arcs de parabole $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ qui se raccordent en $I\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right)$ en admettant en ce point une tangente commune (C_3).
   Déterminer une équation de $\mathcal{P}_1$ et de $\mathcal{P}_2$.
2. On décide alors de choisir la fonction h définie sur $[0; 1]$ par :

$$h(x) = \begin{cases} -x^2 + \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right] \\ (x-1)^2 & \text{si } x \in \left]\dfrac{1}{2}; 1\right] \end{cases}$$

   (a) On note $\mathcal{C}_h$ la courbe représentative de h. La courbe $\mathcal{C}_h$ satisfait-elle aux conditions $(C_1), (C_2)$ et (C_3) ?
   (b) Tracer $\mathcal{C}_h$ dans le repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ en dessinant, au préalable, les tangentes aux points B, H et I.
   (c) Vérifier que pour tout x de $[0; 1]$, $|h'(x)| \leqslant 1$.

II Un polynôme de degré trois

On recherche un autre profil pour la rampe en choisissant cette fois la courbe représentative Γ d'une fonction g définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

1. Déterminer a, b, c et d pour que la courbe Γ vérifient les conditions (C_1) et (C_2).
2. (a) Étudier les variations de la fonction g sur $[0; 1]$.
   (b) Démontrer que pour tout x de $[0; 1]$, $|g'(x)| \leqslant \dfrac{3}{4}$.
3. Construire Γ dans le même repère que celui de $\mathcal{C}_h$. Que remarquez-vous ?

III Une fonction trigonométrique

Cette fois, le choix se porte sur un profil suivant la courbe représentative Ψ d'une fonction t définie sur $[0; 1]$ par $t(x) = a\cos(bx) + c$ avec a, b et c réels non nuls.

1. Déterminer a, b, c et d pour que la courbe Ψ vérifient les conditions (C_1) et (C_2).

2. (a) Étudier les variations de la fonction t sur $[0;1]$.
   (b) Démontrer que pour tout x de $[0;1]$, $|t'(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.
3. Construire Ψ dans le même repère que celui de $\mathcal{C}_h$.
4. Compte-tenu de ce qui précède, lequel des trois profils paraît le mieux adapté ?

IV Algorithmique

Voici écrit un algorithme en langage libre, c'est à dire « dégagé » de toutes contraintes syntaxiques imposées par un langage ou un logiciel de programmation.

```
Déclaration des variables
    s est un nombre
    p est un nombre
Début
    Lire p
    Pour s allant de 0 à p
        Début Pour
            Placer le point de coordonnées (s/p ; g(s/p))
        Fin Pour
Fin
```

Que fait cet algorithme ? *(on pourra choisir une valeur de p, par exemple $p = 10$ et le faire fonctionner « manuellement », en réalisant un tableau de variables)*

Le programmer avec AlgoBox. (*prolongement*)