

EXERCICE 1 :

Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ à l'aide du théorème dit « des gendarmes » : $u_n = \frac{3 - \sin(n)}{n}$

• ○ •

EXERCICE 2 :

Étudier la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

- $\forall n \geq 2, u_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n};$
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{3^{2n-1}};$

• ○ •

EXERCICE 3 :

On pose, pour tout n appartenant à \mathbb{N} : $u_n = \sqrt{n^2 + 6n} - n$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Établir l'égalité $u_n = \frac{6}{\sqrt{1 + \frac{6}{n}} + 1}$ pour tout $n \geq 1$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

• ○ •

EXERCICE 4 :

On pose, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, $u_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$.

- 1(a) Prouver que, pour tout $n \geq 1, \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^3} \geq \frac{1}{n+1}$.
- (b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1, u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

Remarque 1 La limite de la suite ci-dessus s'appelle le nombre d'Apéry. Il tire son nom du français Robert Apéry qui a montré en 1979 que ce nombre était irrationnel.

Valeur approchée de ce nombre : 1,202056903159594

• ○ •

EXERCICE 5 :

On pose, pour tout entier naturel supérieur ou égal à n_0 , $u_n = 3 + \frac{\sqrt{n}}{n + (-1)^n}$.

1. Déterminer n_0 .
2. Prouver que, pour tout $n \geq 2, \frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq u_n - 3 \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1}$.
3. Déterminer les limites des suites de termes généraux : $\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ et $\frac{\sqrt{n}}{n-1}$
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est convergente et calculer sa limite.

• ○ •

EXERCICE 6 : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n, u_n > n^2$.
3. Que peut-on dire sur la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?