EXERCICE 1 : *Questions indépendantes*

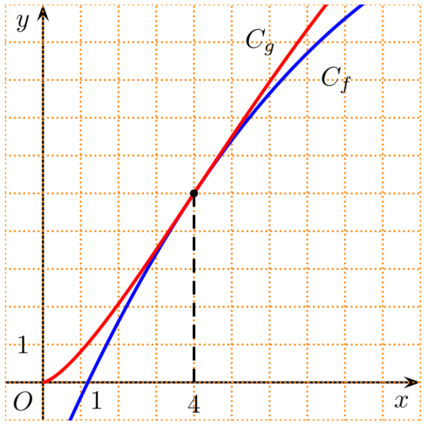
1. Déterminer la dérivée de la fonction f après avoir précisé son ensemble de dérivabilité.
$$f(x) = x(\sqrt{x}+1)^3$$
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point A d'abscisse -1.
$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$$
3. Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction suivante
$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{-4x+3}} + \frac{2}{x^2}$$

• ○ •

EXERCICE 2 :

Sur le dessin ci-contre, on a représenté graphiquement les fonctions f et g définies sur $I =]0;+\infty[$, par :
$$f(x) = \left(\frac{1}{8}x - \frac{5}{2}\right)^3 + 13$$
$$\text{et } g(x) = x\sqrt{x} - \frac{3}{16}x^2$$

Les courbes représentatives de ces deux fonctions semblent avoir la même tangente au point d'abscisse 4. Est-ce vrai ? Justifier la réponse.



Pour répondre à la question, appliquer le protocole suivant :

- Prouver que f et g sont dérivables sur I.
- Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$, pour tout $x \in I$.
- Vérifier que les courbes de f et de g se coupent au point de coordonnées $(4;5)$.
- Calculer les deux coefficients directeurs des tangentes à C_f et à C_g en 4 .
- Conclure.

Si l'on définit g sur $I = [0;+\infty[$, prouver que g est dérivable en 0 et donner la valeur de $g'(0)$.

• ○ •

EXERCICE 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par :
$$f(x) = \frac{3\cos x + x - 2}{x-2}$$

Soit C sa courbe représentative dans un repère.

1. (a) Démontrer que, pour tout $x > 2$, $\dfrac{x-5}{x-2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x+1}{x-2}$.
   (b) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$
2. En déduire l'équation de l'asymptote horizontale à la courbe C en $+\infty$.

• ○ •

EXERCICE 4 : (8 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{-x^2+2x+4}{2x}$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Partie A

1. Étudier les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition. Interpréter graphiquement.
2. Calculer la dérivée de f et montrer que, pour tout x non nul, $f'(x) = \dfrac{-(x^2+4)}{2x^2}$.
3. Établir le tableau de variations de f complété avec les limites sur son ensemble de définition.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T_1) à C_f au point d'abscisse 1.

Partie B

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - x^2 + 4$.
   (a) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$ et montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α.
   (b) Déterminer à l'aide de la calculatrice un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}
2. On note C_h la parabole représentant graphiquement la fonction $h : x \longmapsto 1 - x^2$ dans le même repère que C_f.
   Justifier que C_f et C_h ont un seul point d'intersection et étudier la position relative de ces deux courbes.

• ◯ •

EXERCICE 5 : (6.5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$.
On admet que la fonction f est continue sur $]0;+\infty[$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. En remarquant que pour $x > 0$, $x = \sqrt{x^2}$, calculer la limite de f en 0.
3. Prouver que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$. En déduire le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$.
4. On considère l'équation (E) : $\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{2}{x}$.
   (a) Prouver que pour $x > 0$, l'équation (E) est équivalente à l'équation $f(x) = 2$.
   (b) Au regard des questions précédentes, prouver que l'équation (E) admet une unique solution x_0 dans $]0;+\infty[$.
   Donner un encadrement d'amplitude $0,01$ de x_0.
   (c) x_0 est-il égal à $\sqrt{3}$?

• ◯ •

EXERCICE 6 :

On considère la fonction f définie sur $I = [0;\pi[$, par $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$.

1. (a) Expliquer pourquoi f est dérivable sur I.
   (b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de I.
   (c) Dresser le tableau de variations de f.

2. On définit la suite (u_n) par : $u_{n+1} = \sqrt{1+\cos u_n}$ et $u_0 = 0$.
   Prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.