EXERCICE 1 :
Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à l'aide du théorème dit « des gendarmes » : $u_n = \dfrac{3-\sin(n)}{n}$

• ○ •

EXERCICE 2 :
Étudier la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

- $\forall n \geqslant 2,\ u_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$;
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{3^{2n-1}}$;

• ○ •

EXERCICE 3 :
On pose, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$: $u_n = \sqrt{n^2+6n} - n$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Établir l'égalité $u_n = \dfrac{6}{\sqrt{1+\frac{6}{n}}+1}$ pour tout $n \geqslant 1$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

• ○ •

EXERCICE 4 :
On pose, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, $u_n = \dfrac{1}{1^3} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{n^3}$.

1. (a) Prouver que, pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{(n+1)^3} \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   (b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Remarque 1 La limite de la suite ci-dessus s'appelle le nombre d'Apéry. Il tire son nom du français Robert Apéry qui a montré en 1979 que ce nombre était irrationnel.
Valeur approchée de ce nombre : 1,202056903159594

• ○ •

EXERCICE 5 :
On pose, pour tout entier naturel supérieur ou égal à n_0, $u_n = 3 + \dfrac{\sqrt{n}}{n+(-1)^n}$.

1. Déterrminer n_0.
2. Prouver que, pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{\sqrt{n}}{n+1} \leqslant u_n - 3 \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$.
3. Déterminer les limites des suites de termes généraux : $\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ et $\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente et calculer sa limite.

• ○ •

EXERCICE 6 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
3. Que peut-on dire sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?