

EXERCICE 1 Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x , où x est un réel de l'intervalle $[0; 1]$.

Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :

R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;

J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur exacte de x .
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ». Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.

On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X . On en donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

Partie C

Un fournisseur assure que 90 % des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2 % de pulpe. Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 900 bouteilles afin de vérifier cette affirmation. Sur cet échantillon, 766 bouteilles présentent moins de 2 % de pulpe.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe au seuil de 95 %.
2. Que penser de l'affirmation du fournisseur ?

EXERCICE 2 Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante.

Partie A : Conditionnement des pots

Cette enseigne souhaite vendre la nouvelle crème sous un conditionnement de 50 mL et dispose pour ceci de pots de contenance maximale 55 mL.

On dit qu'un pot de crème est non conforme s'il contient moins de 49 mL de crème.

1. Plusieurs séries de tests conduisent à modéliser la quantité de crème, exprimée en mL, contenue dans chaque pot par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$. Calculer la probabilité qu'un pot de crème soit non conforme.
2. La proportion de pots de crème non conformes est jugée trop importante. En modifiant la viscosité de la crème, on peut changer la valeur de l'écart-type de la variable aléatoire X , sans modifier son espérance $\mu = 50$. On veut réduire à 0,06 la probabilité qu'un pot choisi au hasard soit non conforme.

On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\frac{X - 50}{\sigma'}$

- (a) Préciser la loi que suit la variable aléatoire Z .

- (b) Déterminer une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leq u) = 0,06$.
- (c) En déduire la valeur attendue de σ' .
3. Une boutique commande à son fournisseur 50 pots de cette nouvelle crème.
On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis d'atteindre l'objectif fixé et donc que la proportion de pots non conformes dans l'échantillon est 0,06.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes parmi les 50 pots reçus.
- (a) On admet que Y suit une loi binomiale. En donner les paramètres.
- (b) Calculer la probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes.

Partie B : Campagne publicitaire

Une association de consommateurs décide d'estimer la proportion de personnes satisfaites par l'utilisation de cette crème. Elle réalise un sondage parmi les personnes utilisant ce produit. Sur 140 personnes interrogées, 99 se déclarent satisfaites. Estimer, par intervalle de confiance au seuil de 95 %, la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

EXERCICE 3 Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants : sans réservation ou avec réservation préalable.

1. Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients.
On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif. On rappelle que l'espérance mathématique de X est égale à $\frac{1}{\lambda}$.
Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.
- (a) Déterminer la valeur de λ .
- (b) Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4} .
- (c) Un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4} .
2. Le deuxième restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à 0,8.
On note n le nombre de réservations prises par le restaurant et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.
On admet que les comportements des personnes ayant réservé sont indépendants les uns des autres. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale.
- (a) Préciser, en fonction de n , les paramètres de la loi de la variable aléatoire Y , son espérance mathématique $E(Y)$ et son écart-type $\sigma(Y)$.
- (b) Dans cette question, on désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne $\mu = 64,8$ et d'écart-type $\sigma = 3,6$.
Calculer la probabilité p_1 de l'évènement $\{Z \leq 71\}$ à l'aide de la calculatrice.
- (c) On admet que lorsque $n = 81$, p_1 est une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $p(Y \leq 70)$ de l'évènement $\{Y \leq 70\}$.
Le restaurant a reçu 81 réservations.
Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas accueillir certains des clients qui ont réservé et se présentent ?

EXERCICE 4 Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.

A l'issue des tests, il est noté que

- 96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;
- 97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note

- N l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;
- A l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

Partie A

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment.
2. Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est 0,8763.
3. Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage ...). On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D , suit une loi exponentielle de paramètre λ .

1. On sait que $P(D \leq 4) = 0,5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.
Calculer la valeur exacte de λ .
2. On prendra ici $\lambda = 0,1733$.
Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.
Calculer la probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie C

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. A la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté J , où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres μ et σ . Il apparaît que $\mu = 358$ jours.

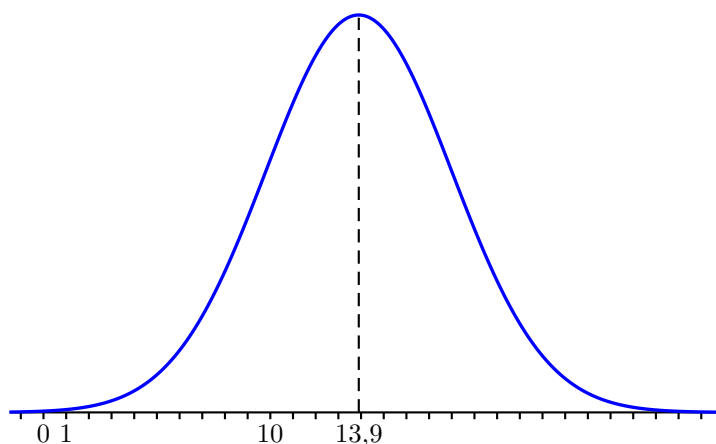
1. Soit $X = \frac{J-358}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par X ?
2. On sait que $P(J \leq 385) = 0,975$. Déterminer la valeur de σ arrondie à l'entier le plus proche.

EXERCICE 5 Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

Des études statistiques ont permis de modéliser le temps hebdomadaire, en heures, de connexion à internet des jeunes en France âgés de 16 à 24 ans par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne $\mu = 13,9$ et d'écart type σ .

La fonction densité de probabilité de T est représentée ci-dessous :



1. On sait que $p(T \geq 22) = 0,023$.
En exploitant cette information :
 - (a) hachurer sur le graphique donné un annexe, deux domaines distincts dont l'aire est égale à 0,023 ;
 - (b) déterminer $P(5,8 \leq T \leq 22)$. Justifier le résultat. Montrer qu'une valeur approchée de σ au dixième est 4,1.
2. On choisit un jeune en France au hasard.
Déterminer la probabilité qu'il soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine.
Arrondir au centième.

Partie B

Dans cette partie, les valeurs seront arrondies au millième.

La Hadopi (Haute Autorité pour la diffusion des Oeuvres et la Protection des droits sur Internet) souhaite connaître la proportion en France de jeunes âgés de 16 à 24 ans pratiquant au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet. Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage.

Mais la Hadopi craint que les jeunes interrogés ne répondent pas tous de façon sincère. Aussi, elle propose le protocole (\mathcal{P}) suivant :

On choisit aléatoirement un échantillon de jeunes âgés de 16 à 24 ans.

Pour chaque jeune de cet échantillon :

- le jeune lance un dé équilibré à 6 faces ; l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;
- l'enquêteur pose la question : « Effectuez-vous un téléchargement illégal au moins une fois par semaine ? » ;

- si le résultat du lancer est pair alors le jeune doit répondre à la question par « Oui » ou « Non » de façon sincère ;
- si le résultat du lancer est « 1 » alors le jeune doit répondre « Oui » ;
- si le résultat du lancer est « 3 ou 5 » alors le jeune doit répondre « Non ».

Grâce à ce protocole, l'enquêteur ne sait jamais si la réponse donnée porte sur la question posée ou résulte du lancer de dé, ce qui encourage les réponses sincères.

On note p la proportion inconnue de jeunes âgés de 16 à 24 ans qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

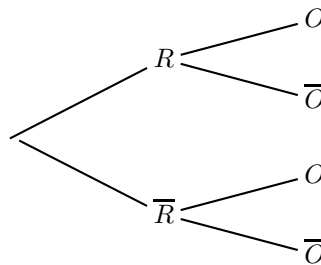
1. Calculs de probabilités

On choisit aléatoirement un jeune faisant parti du protocole (\mathcal{P}).

On note : R l'évènement « le résultat du lancer est pair »,

O l'évènement « le jeune a répondu Oui ».

Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



En déduire que la probabilité q de l'évènement « le jeune a répondu Oui » est :

$$q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}.$$

2. Intervalle de confiance

- (a) A la demande de l'Hadopi, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole (\mathcal{P}). Sur un échantillon de taille 1500, il dénombre 625 réponses « Oui ».

Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion q de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage, parmi la population des jeunes français âgés de 16 à 24 ans.

- (b) Que peut-on en conclure sur la proportion p de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?