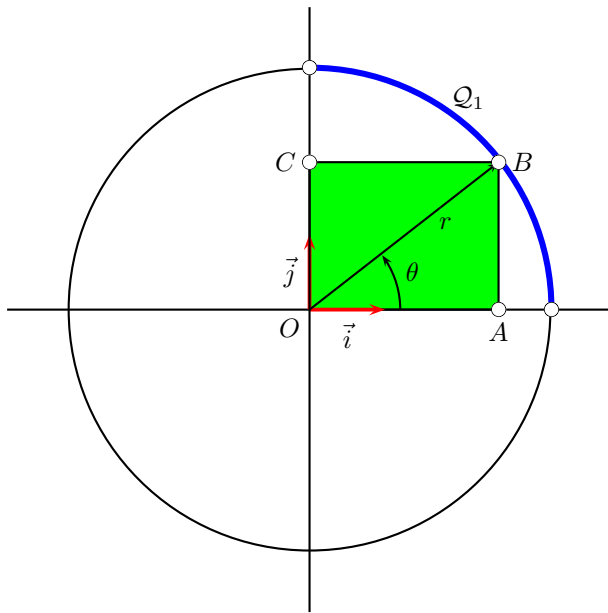


## I Encore un problème d'optimisation



La situation est celle de la figure ci-contre :  $B$  est un point du quart de cercle  $\mathcal{Q}_1$ .

1. Quelles sont les coordonnées du point  $B$  ?
2. Exprimer le périmètre du rectangle  $ABCO$  en fonction de  $r$  et de  $\theta$ .
3. Prouver, en utilisant une formule d'addition, que  $\sin(\theta) + \cos(\theta) = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ .
4. En déduire que le périmètre du rectangle est maximal si, et seulement si,  $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$  est maximal.
5. Pour quelle valeur de  $\theta$ ,  $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$  est-il maximal ? (*raisonner sur le cercle trigonométrique*)
6. Quel est le périmètre maximal du rectangle  $ABCO$  ?
7. Le périmètre peut-il être égal à  $r\sqrt{6}$  ?

## II Calculs trigonométriques

Montrer que les expressions  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont indépendantes de  $x$ .

- $\mathcal{A} = (\cos(x) + \sin(x))^2 + (\cos(x) - \sin(x))^2$  ;
- $\mathcal{B} = \sin^4(x) - \cos^4(x) + 2 \cos^2(x)$  ;
- $\mathcal{C} = (a \cos(x) - b \sin(x))^2 + (b \cos(x) + a \sin(x))^2$ . ( $a, b \in \mathbb{R}^2$ )

## III Équations, inéquations et autres

- Résoudre dans l'intervalle  $]-\pi; \pi]$ , l'inéquation  $-2 \cos(x) \geq \sqrt{2}$  ;
- Résoudre le système : 
$$\begin{cases} 3 \sin(x) - 2 \sin(y) = 5 \\ 2 \sin(x) + 3 \sin(y) = -1 \end{cases}$$
, avec  $x \in [-\pi; \pi]$  et  $y \in [0; 2\pi]$ .
- $x \in [-\pi; \pi]$ . Préciser l'ensemble de définition de la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{2 \cos(x) - 1}$

## IV Balistique

Si l'on fait abstraction des frottements de l'air et de la résistance de l'air, la trajectoire d'un obus, lancé d'un point  $O$ , avec une vitesse initiale  $v$ , suivant un angle d'inclinaison  $\alpha$  par rapport à l'horizontale est la parabole d'équation

$$y = \frac{-g}{2v^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \tan(\alpha)x,$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur ( $g \approx 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ ) et  $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ ,  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .

La portée est la distance de  $O$  au point d'impact de la trajectoire avec l'horizontale.

1. Calculer la portée en fonction de  $v$  et de  $\alpha$ .
2. Pour quelle valeur de  $\alpha$  la portée est-elle maximale ?  
Aide : On pourra déterminer le maximum de  $\cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha)$  en remarquant que la somme est constante et vaut 1.