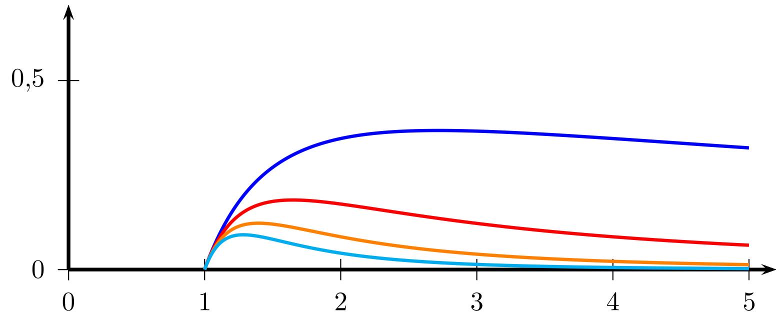
EXERCICE 1 : `Liban 2018 exo 4`

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[1\,;\,5]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$$

Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathcal{C}_n$ pour n appartenant à $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$:

$$f_n'(x) = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$$

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1\,;\,5]$.
On note A_n le point de la courbe $\mathcal{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.
Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}}\ln(x)$$

3(a) Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$:

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}$$

(b) Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

(c) Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface sous la courbe f_n, c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}_n$.
Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.

• ○ • ○ •

EXERCICE 2 : `Centres étrangers 2018 exo 2`

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel.

Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.

Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.

À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,20]$ par :

$$f(t) = (0,8t + 0,2)\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,03.$$

On donne ci-contre le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,20]$.
Ainsi, la valeur $f(0) = 0,23$ traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

t	0		1,75		20
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f	0,23	$\nearrow$		$\searrow$	

1. Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.
   (a) Calculer $f(20)$.
   (b) Déterminer le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience.
2. On souhaite que le taux de CO_2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.
   (a) Justifier qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition.
   (b) On considère l'algorithme suivant :

```
t ← 1,75
p ← 0,1
V ← 0,7
Tant que V > 0,035
      t ← t + p
      V ← (0,8t + 0,2)e^(−0,5t) + 0,03
Fin Tant que
```

   Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'algorithme ?
   Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?
3. On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.
   (a) Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,11]$ par :

$$F(t) = (-1,6t - 3,6)\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,03t.$$

   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,11]$.
   (b) En déduire le taux moyen V_m, valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,11]$. Arrondir le résultat au millième, soit à 0,1 %.

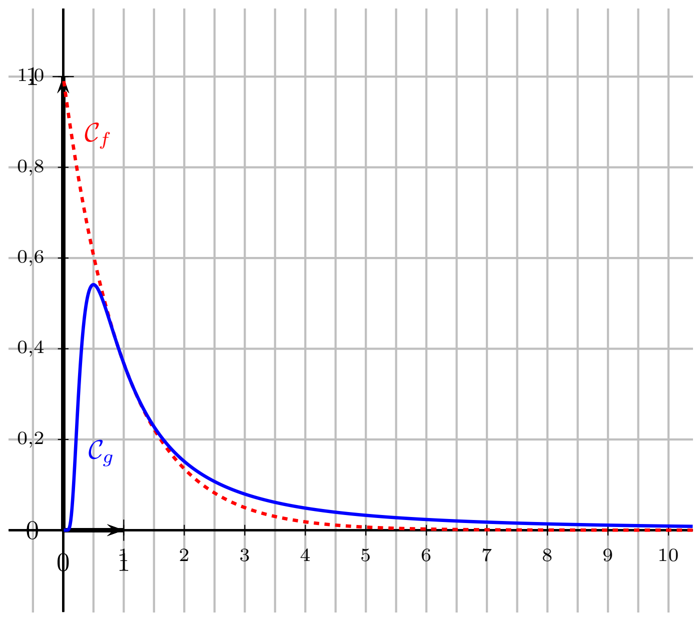
• ○ • ○ •

EXERCICE 3 : Nvelle Calédonie 2018 exo 1

Soient f et g les fonctions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

On admet que f et g sont dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$. On note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.
Les représentations graphiques de f et g dans un repère orthogonal, nommées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont données ci-dessous :



Partie A – Conjectures graphiques

Dans chacune des questions de cette partie, aucune explication n'est demandée.

1. Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $f(x) = g(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $g'(x) = 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B – Étude de la fonction g

1. Calculer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. On admet que la fonction g est strictement positive sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   Soit h la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \ln\big(g(x)\big)$.
   (a) Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif,
   $$h(x) = \frac{-1 - 2x\ln x}{x}.$$
   (b) Calculer la limite de $h(x)$ quand x tend vers 0.
   (c) En déduire la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0.
3. Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif,
   $$g'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\,(1-2x)}{x^4}.$$
4. En déduire les variations de la fonction g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie C – Aire des deux domaines compris entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

1. Démontrer que la point A de coordonnées $\left(1\ ;\ \mathrm{e}^{-1}\right)$ est un point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

   On admet que ce point est l'unique point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 1[$ et en dessous sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.
2. Soient a et b deux réels strictement positifs. Démontrer que
   $$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\underset{\cdot}{\mathrm{x}} = \mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{a}} - \mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{b}}.$$
3. Démontrer que
   $$\lim_{a \to 0} \int_a^1 \big(f(x) - g(x)\big)\,\underset{\cdot}{\mathrm{x}} = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}.$$
4. On admet que
   $$\lim_{a \to 0} \int_a^1 \big(f(x) - g(x)\big)\,\underset{\cdot}{\mathrm{x}} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\underset{\cdot}{\mathrm{x}}.$$

   Interpréter graphiquement cette égalité.

• ○ • ○ •