

I Signes d'expressions

I.1 Expression 1

Quel est le signe de $-3(x-2)^2+3$ pour x appartenant à $]2;3[$?

I.2 Expression 2

Quel est le signe de $(2n+4)(n-3)$ pour n appartenant à \mathbb{N} ?

I.3 Expression 3

Quel est le signe de l'expression $\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}$ pour $x \in]0; +\infty[$?

I.4 Expression 4

Quel est le signe de $3\sqrt{n-3} - 12$ pour $n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$?

• ○ •

II Fonctions

II.1 Une étude de signes

On considère le quotient $A(x) = \frac{-4x^2 + 18x - 8}{2x + 1}$.

1. Pour quelles valeurs de x , le quotient $A(x)$ est-il défini ? On notera D la partie de \mathbb{R} qui les contient.
2. Déterminer le signe de l'expression $A(x)$.
3. Pour tout $x \in D$, déterminer trois nombres réels a, b et c tels que

$$A(x) = ax + b + \frac{c}{2x + 1}$$

4. Déterminer le signe de $-\frac{18}{2x + 1}$ pour tout x de D . Donner une interprétation « fonctionnelle » du signe précédent.

• ○ •

II.2 Une étude de fonction

$$h : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

Soit la fonction h définie par $x \longmapsto \frac{x^2 - 3}{\sqrt{x}}$ où I est le plus grand intervalle contenu dans \mathbb{R} .

1. Déterminer I .
2. Étudier les variations de h sur I .
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, conjecturer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = \lambda$.

• ○ •

III Suites

III.1 Calculs de termes d'une suite

Dans chacun des cas suivants, calculer u_1, u_2 et u_3 :

1. $u_n = 2n^2 - 5n$ pour tout $n \geq 0$;
2. $u_0 = 3$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$;
3. $u_0 = -2$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n = -u_{n-1} + 4$;
4. $u_0 = -3$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 5 ;
5. $u_0 = 2$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

• ○ •

III.2 Jeu d'écritures

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2n^2 - n + 2$.

Exprimer en fonction de n les termes u_{n+1} , u_{n-2} et u_{2n} . La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle monotone?

• ○ •

III.3 Une suite somme

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 .
2. Calculer pour tout entier $n \geq 1$, la différence $u_{n+1} - u_n$.
3. Écrire u_n en utilisant le symbole Σ .

• ○ •

III.4 D'une suite à l'autre

On considère les suites définies par $u_0 = 1$ et pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} = 3u_n - 6$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3$.

1. Calculer les 20 premiers termes de ces suites. Semblent-elles arithmétiques? géométriques?
2. Émettre une conjecture sur une relation de récurrence entre v_n et v_{n+1} . La démontrer.
3. Donner la forme explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Reprendre l'exercice précédent avec $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$, puis $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

• ○ •

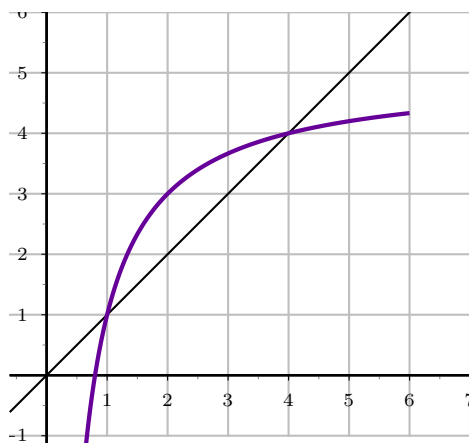
IV Vers Chapitre 2

IV.1 Une propriété héréditaire

On considère la fonction f définie sur $]0; 6]$ par $f(x) = 5 - \frac{4}{x}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n) = 5 - \frac{4}{u_n}$.

IV.1.1 Conjectures



Représenter graphiquement les premiers termes de la suite. Proposer deux nombres entiers m et M tels qu'il semble que, pour tout entier n , on ait :

$$m \leq u_n \leq M$$

IV.1.2 Démonstration

Supposons que, pour un entier $k \geq 0$, on ait $2 \leq u_k \leq 4$. Montrer que $2 \leq u_{k+1} \leq 4$.

A-t-on justifié ainsi l'affirmation suivante : **Pour tout entier n , $2 \leq u_n \leq 4$** ?

IV.1.3 Premier terme d'une suite récurrente

On considère, désormais, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la même relation de récurrence que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mais telle que $v_0 = 0, 5$. Est-il vrai que, si pour un entier $k \geq 0$, on a $2 \leq v_k \leq 4$ alors on a $2 \leq v_{k+1} \leq 4$? Peut-on dire que, pour tout entier n , $2 \leq v_n \leq 4$?