I Fonctions

I.1 Une étude de signes

On considère le quotient $A(x) = \dfrac{-4x^2 + 18x - 8}{2x + 1}$.

1. Déterminer le signe de l'expression $A(x)$. (*Attention valeur(s) interdite(s)*)
2. Pour tout x (valables appartenant à D), déterminer trois nombres réels a, b et c tels que
$$A(x) = ax + b + \frac{c}{2x+1}$$
3. Déterminer le signe de $-\dfrac{18}{2x+1}$ pour tout x de D. Donner une interprétation « fonctionnelle » du signe précédent.

• ○ •

I.2 Une étude de fonction

Soit la fonction h définie par $\begin{aligned} h : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2-3}{\sqrt{x}} \end{aligned}$ où I est le plus grand intervalle contenu dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer I.
2. Étudier les variations de h sur I.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, conjecturer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = \lambda$.

• ○ •

II Suites

II.1 Calculs de termes d'une suite

Dans chacun des cas suivants, calculer u_1, u_2 et u_3 :

1. $u_n = 2n^2 - 5n$ pour tout $n \geqslant 0$;
2. $u_0 = 3$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$;
3. $u_0 = -2$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = -u_{n-1} + 4$;
4. $u_0 = -3$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 5 ;
5. $u_0 = 2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

• ○ •

II.2 Jeu d'écritures

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2n^2 - n + 2$.

Exprimer en fonction de n les termes u_{n+1}, u_{n-2} et u_{2n}. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?

• ○ •

II.3 Une suite somme

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Calculer pour tout entier $n \geqslant 1$, la différence $u_{n+1} - u_n$.
3. Écrire u_n en utilisant le symbole Σ.

• ○ •

II.4 D'une suite à l'autre

On considère les suites définies par $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 6$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3$.

1. Calculer les 20 premiers termes de ces suites. Semblent-elles arithmétiques ? géométriques ?
2. Émettre une conjecture sur une relation de récurrence entre v_n et v_{n+1}. La démontrer.
3. Donner la forme explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Reprendre l'exercice précédent avec $u_0 = 2$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$, *puis* $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

• ○ •

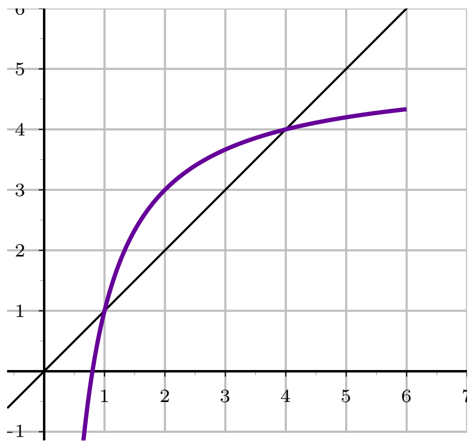
III Vers la leçon 1

III.1 Une propriété héréditaire

On considère la fonction f définie sur $]0;6]$ par $f(x) = 5 - \dfrac{4}{x}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n) = 5 - \dfrac{4}{u_n}$.

III.1.1 Conjectures



Représenter graphiquement les premiers termes de la suite.
Proposer deux nombres entiers m et M tels qu'il semble que, pour tout entier n, on ait :

$$m \leqslant u_n \leqslant M$$

III.1.2 Démonstration

Supposons que, pour un entier $k \geqslant 0$, on ait $2 \leqslant u_k \leqslant 4$. Montrer que $2 \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$.

A-t-on justifié ainsi l'affirmation suivante : $\boxed{\textbf{Pour tout entier } n\textbf{, } 2 \leqslant u_n \leqslant 4}$?

III.1.3 Premier terme d'une suite récurrente

On considère, désormais, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mais telle que $v_0 = 0,5$.
Est-il vrai que, si pour un entier $k \geqslant 0$, on a $2 \leqslant v_k \leqslant 4$ alors on a $2 \leqslant v_{k+1} \leqslant 4$?
Peut-on dire que, pour tout entier n, $2 \leqslant v_n \leqslant 4$?