EXERCICE 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \dfrac{1}{2}$

EXERCICE 2 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i = 1$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

1. Montrer que : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\left|\dfrac{2}{i} - 1 - \dfrac{1}{n}\right| \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}$.
2. En déduire : $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

EXERCICE 3 :

Choisir parmi les réponses suivantes : bijective, ni surjective ni injective, injective mais pas surjective, surjective mais pas injective, pour les applications proposées ci-dessous :

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = x^2$.
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, telle que $f(x) = x^2$.
3. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, telle que $f(x) = x$.
4. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = 8x + 50$.
5. $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = 2x$.
6. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \{14\}$, telle que $f(x) = 14$.
7. $f : \{17\} \longrightarrow \{12, 17\}$, telle que $f(x) = 17$.
8. $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
9. $f : \{0\} \longrightarrow \{0\}$, telle que $f(x) = 0$.
10. $f : \{1\} \longrightarrow \{0, 5\}$, telle que $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

EXERCICE 4 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1; 1[$.
2. Déterminer, pour $y \in]-1; 1[$, une expression de $f^{-1}(y)$ analogue à celle de $f(x)$.

EXERCICE 5 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$. Quelles sont les solutions sur $[-\pi; \pi]$?
2. Résoudre sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$, l'inéquation $\cos(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$.
3. Vérifier qu'il existe des réels a, b et c tels que $2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^3 - 3x^2 + 1 \geqslant 0$.
4. Soit f le fonction définie par $f(x) = 2\sin(x) + \tan(x) - 3x$. Déterminer son domaine de définition et sa dérivée.
5. Étudier le signe de f' sur $[-\pi; \pi]$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
6. En déduire que sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $2\sin(x) + \tan(x) \geqslant 3x$.

EXERCICE 6 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. f est-elle périodique ?
3. Déterminer la dérivée de f.
4. Résoudre dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, l'inéquation $\sqrt{\cos(x)} \geqslant \sqrt{\sin(x)}$.
   En déduire le signe de f' sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et le tableau de variations de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
5. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1$.

EXERCICE 7 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |\sin(nx)| \leqslant n|\sin(x)|$.

EXERCICE 8 :

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. Trouver une démonstration directe. (on pourra par exemple, écrire $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ sous la forme $\dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$ où a, b et c sont des réels à déterminer et écrire la somme sous forme de sommes télescopiques).

EXERCICE 9 :

Déterminer les valeurs exactes du cosinus, du sinus et de la tangente de $\dfrac{\pi}{12}$.
En déduire les solutions de l'équation

$$(E) : (\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos(\theta) + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin(\theta) = 2$$

EXERCICE 10 :

Pour tout réel $m > 0$, on définit une application f_m de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout x,

$$f_m(x) = \ln(\mathrm{e}^x + m\mathrm{e}^{-x})$$

On notera C_m la courbe représentative de f_m dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.

1. Vérifier que le domaine de définition de f_m est $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f_m puis montrer que C_m admet deux asymptotes dont l'une est indépendante de m.
3. Dans quelle transformation simple C_1 a-t-elle pour image C_m ?

Corrections

EXERCICE 1 :

$$S = \left[-1; 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}\right[.$$

EXERCICE 2 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i = 1$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

1. Montrer que : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\left|\frac{2}{i} - 1 - \frac{1}{n}\right| \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.
2. En déduire : $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

EXERCICE 3 :

Choisir parmi les réponses suivantes : bijective, ni surjective ni injective, injective mais pas surjective, surjective mais pas injective, pour les applications proposées ci-dessous :

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = x^2$.
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, telle que $f(x) = x^2$.
3. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, telle que $f(x) = x$.
4. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = 8x + 50$.
5. $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = 2x$.
6. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \{14\}$, telle que $f(x) = 14$.
7. $f : \{17\} \longrightarrow \{12, 17\}$, telle que $f(x) = 17$.
8. $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = \frac{1}{x}$.
9. $f : \{0\} \longrightarrow \{0\}$, telle que $f(x) = 0$.
10. $f : \{1\} \longrightarrow \{0, 5\}$, telle que $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

EXERCICE 4 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1; 1[$.
2. Déterminer, pour $y \in]-1; 1[$, une expression de $f^{-1}(y)$ analogue à celle de $f(x)$.

EXERCICE 5 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$. Quelles sont les solutions sur $[-\pi; \pi]$?
2. Résoudre sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$, l'inéquation $\cos(x) \geqslant -\frac{1}{2}$.
3. Vérifier qu'il existe des réels a, b et c tels que $2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^3 - 3x^2 + 1 \geqslant 0$.
4. Soit f le fonction définie par $f(x) = 2\sin(x) + \tan(x) - 3x$. Déterminer son domaine de définition et sa dérivée.

5. Étudier le signe de f' sur $[-\pi;\pi]$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
6. En déduire que sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $2\sin(x)+\tan(x)\geqslant 3x$.

EXERCICE 6 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{\cos(x)}+\sqrt{\sin(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. f est-elle périodique ?
3. Déterminer la dérivée de f.
4. Résoudre dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, l'inéquation $\sqrt{\cos(x)}\geqslant\sqrt{\sin(x)}$.
   En déduire le signe de f' sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et le tableau de variations de f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
5. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sqrt{\cos(x)}+\sqrt{\sin(x)}=1$.

EXERCICE 7 :

Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, |\sin(nx)|\leqslant n|\sin(x)|$.

EXERCICE 8 :

Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. Trouver une démonstration directe. (on pourra par exemple, écrire $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ sous la forme $\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2}$ où a,b et c sont des réels à déterminer et écrire la somme sous forme de sommes télescopiques).

EXERCICE 9 :

Déterminer les valeurs exactes du cosinus, du sinus et de la tangente de $\frac{\pi}{12}$.
En déduire les solutions de l'équation

$$(E) : (\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos(\theta)+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin(\theta)=2$$

EXERCICE 10 :

Pour tout réel $m>0$, on définit une application f_m de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout x,

$$f_m(x)=\ln(\mathrm{e}^x+m\mathrm{e}^{-x})$$

On notera C_m la courbe représentative de f_m dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Vérifier que le domaine de définition de f_m est $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f_m puis montrer que C_m admet deux asymptotes dont l'une est indépendante de m.
3. Dans quelle transformation simple C_1 a-t-elle pour image C_m ?