Cours de Mathématiques en terminale STMG

Michel IMBERT

Année scolaire 2018-2019

Lycée Bertran de Born - *Périgueux*

• ○ • ○ •

Table des matières

Chapitre 1

Information Chiffrée

Sommaire

I Proportions

I.1 Calculer un pourcentage d'une quantité :

ex : 38% de 40 =

I.2 Calculer une proportion d'un ensemble A dans un ensemble E :

$p = \dfrac{n_A}{n_E}$.

ex : 26 personnes sur 200, cela fait une proportion de ...

I.3 Savoir retrouver n_E connaissant p et n_A :

ex : 24 élèves sont malades, ce qui représente 86% de la classe. Retrouvons le nombre d'élèves x de la classe :

I.4 Proportions enchainées :

Si p_1 est la proportion de A dans B,
et p_2 est la proportion de B dans E,
alors la proportion de A dans E est $p = p_1 \times p_2$.

ex : 13% des élèves sont des garçons, et 20% des garçons font du sport. La proportion des garçons qui font du sport parmi tous les élèves est :

I.5 On n'ajoute pas si facilement les proportions ! :

ex : Dans une école primaire, il y a 60 filles et 40 garçons. 20% des filles et 15% des garçons portent des lunettes. Quel pourcentage d'élèves portent des lunettes dans l'école ?

II Indices

année	2006	2007	2008	2009
valeur	32	40	36	46
indice		**100**		

- Si on décide de prendre 2007 comme année **de référence** : on donne 100 comme valeur à cette année-là et on rapporte toutes les autres valeurs proportionnellement.

  Remplir le tableau en faisant les "produits en croix".

- Un indice de 115 indique .... par rapport à l'année de référence (2007).

- Un indice de 90 indique .... par rapport à l'année de référence (2007).

- ATTENTION : entre 2008 et 2009, il **n'y a pas** augmentation de $115 - 90 = 25\%$!
  Le taux d'évolution est $t =$

- De même : entre 2006 et 2007, il **n'y a pas** augmentation de $100 - 80 = 20\%$!
  Le taux d'évolution est $t =$

  (par contre : il y a une baisse de .... de 2007 à 2006 !)

III Évolutions

$$V_d \xrightarrow{\text{taux d'évolution } t} V_a \qquad \times(1+t)$$

- Pour trouver V_a : on multiplie V_d par $1+t$.
  $\boxed{V_a = V_d \times (1+t)}$
- Pour trouver V_d : on divise V_a par $1+t$.
  $\boxed{V_d = \dfrac{V_a}{1+t}}$
- Pour trouver le taux d'évolution :

  méthode 1 : $\boxed{t = \dfrac{V_a - V_d}{V_d}}$

  méthode 2 : on calcule le CM : $CM = \dfrac{V_a}{V_d}$,
  puis $\boxed{t = CM - 1}$.

- Faire la différence entre le taux d'évolution t et
  le coefficient multiplicateur $\boxed{CM = 1+t}$.
  → Pour une augmentation de 12%,
  le taux est $t =$
  et on multiplie par $CM =$.

  → Pour une baisse de 12%,
  le taux est $t =$
  et on multiplie par $CM =$.

- **Calculer un taux global correspondant à plusieurs évolutions successives :**
  (*Si je ne connais ni V_a, ni V_d*)

$$V_d \underset{\times(1+t_1)}{\longrightarrow} V_1 \underset{\times(1+t_2)}{\longrightarrow} V_2 \;\ldots\ldots\ldots \underset{\times(1+t_n)}{\longrightarrow} V_a \qquad \times(1+t_g)$$

> Il faut multiplier les coefficients multiplicateurs :
> $\mathbf{1 + t_g = (1+t_1)(1+t_2) \times \ldots \times (1+t_n) = CM_g}$.
> → donc :
> $\mathbf{t_g = CM_g - 1}$

ex : Calculer le taux d'évolution global correspondant à une baisse de 15%, puis une hausse de 12% :

- **Calculer un taux moyen correspondant à n évolutions successives, connaissant le taux global t_g :**

$$V_d \underset{\times(1+t_m)}{\longrightarrow} V_1 \underset{\times(1+t_m)}{\longrightarrow} V_2 \;\ldots\ldots\ldots \underset{\times(1+t_m)}{\longrightarrow} V_a \qquad \times(1+t_g)$$

> → On écrit : $\mathbf{(1+t_m)^n = 1 + t_g}$
>
> puis $\quad \mathbf{t_m} = \sqrt[n]{1+t_g} - 1$

ex : Pour une hausse annuelle de 15%,
on cherche le taux mensuel moyen t_m.
C'est le taux appliqué 12 fois de suite, et qui donne un taux global $t_g =$ ....
Donc $t_m =$

$\sqrt[12]{(1+0,15)}$ est la « racine 12^{me} de 1,15 ».

Á la calculatrice, on tape :

12	$\sqrt[x]{y}$	(	1+0,15	)	-	1	=

Sur les T.I., on accède à $\sqrt[x]{y}$ avec la touche MATH

Chapitre 2

Suites arithmétiques et géométriques

Sommaire

• ○ • ○ •

I Pour commencer

I.1 Garde d'enfants

Une société de services propose des prestations de garde d'enfants à domicile au tarif suivant : les clients payent une cotisation annuelle de 150 euros à laquelle s'ajoutent 20 euros par heure de garde.

On pose $u_0 = 150$ et, pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le prix total payé par une famille pour n heures de garde durant l'année. On a donc $u_1 = 170$.

1. Donner les valeurs de u_2 et de u_3.
2. Pour 450 heures de garde, une famille paie 9150 euros, soit $u_{450} = 9150$. Déterminer u_{451} et u_{452}.
3. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n ; en déduire la nature de la suite (u_n).
4. Pour récompenser la fidélité de la famille *Jeanblanc*, la société lui offre la cotisation annuelle. La famille *Jeanblanc* ne paie donc que les heures de garde.
   (a) Quelle somme d'argent débourse cette famille pour 320 heures de garde ?
   (b) Quelle somme d'argent débourse-t-elle pour n heures de garde ?
   (c) En déduire l'expression de la somme totale u_n versée pour n heures de garde par une famille réglant la cotisation annuelle.

• ○ • ○ •

I.2 Les centenaires se portent bien

En France, depuis 1975, le nombre de centenaires progresse continûment à un rythme qui permet le doublement de ce nombre tous les 10 ans.

On fait l'hypothèse que ce taux restera constant les prochaines années.

Actuellement, la France compte à peu près 15000 centenaires.

On note $C_0 = 15000$ le nombre actuel de centenaires et, pour tout n non nul, C_n le nombre de centenaires dans n décennies selon l'hypothèse faite.

1. Déterminer le nombre C_1 de centenaires prévisibles dans 10 ans.
2. Déterminer le nombre C_2 de centenaires prévisibles dans 20 ans.
3. exprimer C_{n+1} en fonction de C_n. En déduire la nature de la suite (C_n).
4. Combien de fois la population de centenaires aura-t-elle doublée dans cinq décennies ? En déduire le nombre C_5 de centenaires prévu dans 50 ans.
5. Combien de fois la population de centenaires aura-t-elle doublée dans n décennies ? En déduire l'expression de C_n en fonction de n.
   (En fait les prévisions les plus optimistes de l'INSEE sont inférieures à cette hypothèse, en particulier à cause du déficit de naissances lors de la Première guerre mondiale)

• ○ • ○ •

II Formules

Suites ARITHMÉTIQUES	Suites GEOMÉTRIQUES
Propriété 1 $\rightarrow$ Une suite est arithmétique quand on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre a. $\rightarrow$ Le nombre a est appelé la **raison** de la suite.	**Propriété 2** $\rightarrow$ Une suite est géométrique quand on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre q. $\rightarrow$ Le nombre q est appelé la **raison** de la suite.

Expression de u_{n+1} en fonction de u_n :

C'est la ***"relation de récurrence"***, elle permet de calculer les termes consécutifs de la suite, l'un après l'autre (u_0, u_1, u_2, ...)

Propriété 3 $\mathbf{u_{n+1} = u_n + a}$.	**Propriété 4** $\mathbf{u_{n+1} = u_n \times q}$.

Expression de u_n en fonction de n :

C'est le ***"terme général"***, il permet de calculer directement un terme de la suite (ex : u_{20} se calcule en remplaçant n par 20).

Propriété 5 $\mathbf{u_n = u_0 + na}$ si le 1er terme est u_0. $\mathbf{u_n = u_1 + (n-1)a}$ si le 1er terme est u_1.	**Propriété 6** $\mathbf{u_n = u_0 \times q^n}$ si le 1er terme est u_0. $\mathbf{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$ si le 1er terme est u_1.

Sens de variation :

Propriété 7 $\rightarrow$ Une suite arithmétique de raison a est **- croissante si** $a > 0$ **(strict. positive)**, **- constante si** $a = 0$ **(nulle)**, et **- décroissante si** $a < 0$ **(strict. négative)**.	**Propriété 8** $\rightarrow$ Une suite géométrique de raison q dont le premier terme est strictement positif, est **- croissante si** $q > 1$, **- constante si** $q = 1$, **- décroissante si** $0 < q < 1$.

III Calculs de termes

Exemple 1
- (u_n) est une suite arithmétique de raison -2 et $u_0 = 5$. Calculer u_1, u_2 et u_3.
- (u_n) est une suite arithmétique de raison a avec $u_2 = 42$ et $u_5 = 60$. Combien vaut a ?
- (u_n) est une suite arithmétique de raison $2,5$ avec $u_1 = 10$. Donner l'expression de u_n en fonction de n. Calculer u_8.

Exemple 2
- (u_n) est une suite géométrique de raison 2 et $u_0 = 5$. Calculer u_1, u_2 et u_3.
- (u_n) est une suite géométrique de raison q avec $u_2 = 8$ et $u_5 = 216$. Combien vaut r ?
- (u_n) est une suite géométrique de raison $1,2$ avec $u_1 = 450$. Donner l'expression de u_n en fonction de n. Calculer une valeur approchée de u_8.

IV Somme de termes consécutifs - Calculatrice

Ex : pour calculer la somme $u_4 + u_5 + u_6 + ... + u_{20}$ pour une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 12$:

Texas Instrument

[2nde], [0] ("catalogue"), et choisir [SOMME]

[2nde], [0] ("catalogue"), et choisir [SUITE]

Compléter ensuite pour obtenir **somme(suite(terme général de la suite, X,premier indice, dernier indice)**

pour notre exemple on aura somme(suite(12+3X, X,4,20))

Casio

[MENU][RUN], puis régler dans le [SETUP] (shift/menu) le mode Input/Ouput à [LINEAR]

[shift], [4] ("catalogue"), et choisir [$\sum$]

Compléter ensuite pour obtenir **$\sum$(terme général de la suite, X,premier indice, dernier indice)**

pour notre exemple on aura $\sum$(12+3X, X,4,20))

Remettre dans le [SETUP] le mode Input/Ouput à [MATH]

pour les Casio plus anciennes, on accède au symbole [$\sum$] ainsi : [OPTN], puis [CALC](F4), puis [$\sum$](F6 et F3).

• ◯ • ◯ •

Exemple 3 On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 16$ et de raison 1,5.

1. Donner l'expression du terme général u_n.
2. Déterminer à la calculatrice la somme $S = u_9 + u_{10} + \ldots + u_{28}$.

• ◯ • ◯ •

Exemple 4 On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 400$ et de raison 0,75.

1. Donner l'expression du terme général u_n.
2. Déterminer à la calculatrice la somme $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{25}$.

• ◯ • ◯ •

V Modélisation de situation concrète par des suites :

Exemple 5 Nicolas souhaite participer à une course de vélo. Pour se préparer, il parcourt 30 kilomètres la première semaine, puis augmente chaque semaine de 9 kilomètres la distance parcourue.
Pour tout entier naturel n non nul, on note v_n la distance en kilomètres parcourue la $n-$ème semaine d'entraînement. On a donc $v_1 = \ldots\ldots$.

1. Calculer v_2 et v_3. En déduire la distance parcourue en trois semaines d'entraînement.
2. Justifier que la suite (v_n) est arithmétique. Déterminer l'expression du terme général v_n.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer la distance totale parcourue en 20 semaines d'entraînement.

• ◯ • ◯ •

Exemple 6 La population d'une ville augmente de 5% par an. En janvier 2016, cette ville compte 16000 habitants. Pour tout entier naturel n, on note v_n la population prévue pour l'année (2016+n). On a donc $v_0 = \ldots\ldots$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3.
2. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, en déduire la nature de la suite et préciser sa raison.
3. Déterminer l'expression du terme général v_n.
4. Déterminer la population prévue dans cette ville en 2027.

• ◯ • ◯ •

VI Exemples - Placements financiers

Les suites dans les placements financiers :

Exemple 7 : INTÉRETS SIMPLES au taux de 6%

Un capital de 2000 € est placé fin 2010 à la banque, et rapporte chaque année 6% du placement de départ, soit 6% de 2000 €. On note S_0 la valeur du capital fin 2010 ($S_0 = 2000$) et S_n la valeur du capital l'année $2010 + n$.

1. Calculer S_1, que représente cette valeur ?
2. Calculer S_2, que représente cette valeur ?
3. Dire en justifiant quelle est la nature de la suite (S_n).
4. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n
5. Exprimer S_n en fonction de n.
6. Calculer le capital disponible en 2023.

Exemple 8 : INTÉRETS COMPOSES au taux de 6%

Un capital de 2000 € est placé fin 2012 et augmente chaque année de 6%.
On note C_0 la valeur du capital fin 2012 ($C_0 = 2000$) et C_n la valeur du capital l'année $2012 + n$.

1. Calculer C_1, que représente cette valeur ?
2. Calculer C_2, que représente cette valeur ?
3. Dire en justifiant quelle est la nature de la suite (C_n).
4. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n :
5. Exprimer C_n en fonction de n.
6. Calculer le capital disponible en 2023.

Chapitre 3

Statistiques à deux variables - Ajustement affine

Sommaire

• ○ • ○ •

I Définition - Nuage de points

SAVOIR :
$\longrightarrow$ **Une série statistique est "double" (ou série "à 2 variables")** quand on observe simultanément **deux** caractères x et y sur une population.

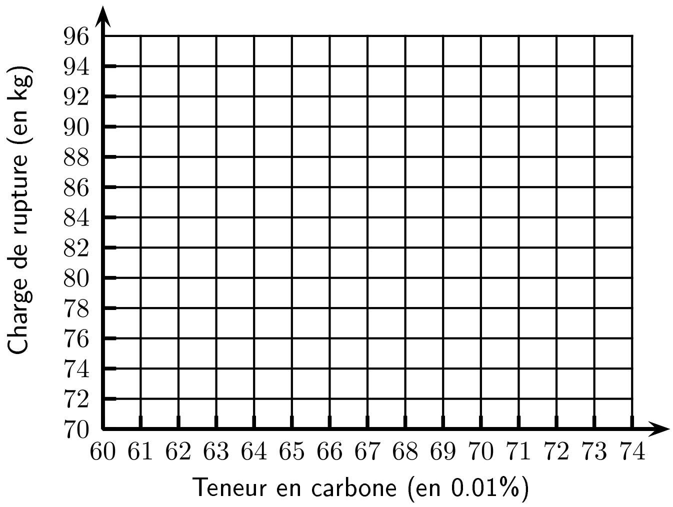
Exemple 9 Par exemple, sur une population de pièces en acier, on mesure x, la teneur en carbone et y la charge nécessaire à la rupture de la pièce.

Numéro pièce	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Teneur en carbone x_i (en 0.01%)	70	60	68	64	66	64	62	70	74	62
Charge de rupture y_i (en kg)	87	71	79	74	79	80	75	86	95	70

Il y a 10 couples de valeurs. L'effectif total est $N = 10$.

SAVOIR :
$\longrightarrow$ **Le nuage de points** est l'ensemble des N points dont les coordonnées sont les $(x_i; y_i)$.

Exemple 10 Construire le nuage de points correspondant à l'exemple précédent.



II Point moyen

SAVOIR :
$\longrightarrow$ **Le point moyen** d'un nuage de N points est le point G de coordonnées $\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} \\ \overline{y} = \dfrac{y_1 + y_2 + \ldots + y_N}{N} \end{cases}$

Exemple 11 Déterminer les coordonnées du point moyen de l'exemple et le placer dans le graphique précédent.

$\overline{x} = ...$

$\overline{y} = ...$

Et aussi à la calculatrice :

T.I.

STAT, EDIT.

Saisir les valeurs x_i et y_i dans L1 et L2

STAT, CALC, 2-VAR STATS

Taper ensuite L1 , L2 ENTER

Lire alors n (effectif total) et $\overline{x}$, puis plus bas $\overline{y}$.

Casio

MENU, STAT

Saisir les valeurs x_i et y_i dans L1 et L2

CALC, puis régler dans SET :

2-VAR Xlist : L1, 2-VAR Ylist : L2 et 2-VAR Freq : 1

EXE puis 2VAR.

Lire alors n (effectif total) et $\overline{x}$, puis plus bas $\overline{y}$.

III Ajustement affine

L'idée générale des statistiques à 2 variables est de rechercher s'il existe une relation entre les 2 caractères x et y.

Lorsque les points du nuage d'une série statistique sont approximativement alignés, on cherche une fonction affine qui exprime de façon approchée y en fonction de x.

SAVOIR :

$\longrightarrow$ Un ajustement affine est justifié lorsque les points du nuage sont approximativement alignés.

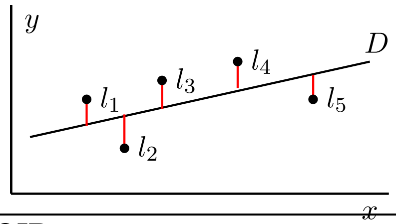
$\longrightarrow$ La droite d'équation $y = ax + b$ que l'on trouve s'appelle la "**droite d'ajustement**".

$\longrightarrow$ Il existe diverses méthodes pour trouver une **droite d'ajustement**, nous en voyons 2 cette année :

III.1 Méthode graphique

On trace ***au jugé*** une droite en s'efforçant d'équilibrer le nombre de points situés de part et d'autre. Cette méthode est peu précise.

III.2 Méthode des moindres carrées



La droite d'ajustement donnée par cette méthode est celle qui rend minimale la somme des carrés de toutes les longueurs sur la figure ($l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2$).

SAVOIR :

$\longrightarrow$ Cette droite est appelée **droite de régression de y en x**.

$\longrightarrow$ Les coefficients a et b de son équation $y = ax + b$ sont calculés directement à la calculatrice (voir ci-dessous).

$\longrightarrow$ Pour représenter la droite dans le repère, on doit placer 2 points. Un premier point utilisable est le point moyen, qui est toujours dessus, et un autre point peut être trouvé en faisant un tableau de valeurs à la calculatrice.

Texas Instrument

STAT, EDIT.

Saisir les valeurs x_i et y_i L1 et L2

STAT, CALC, LinReg(ax+b)

Taper ensuite L1 , L2 ENTER

Lire alors a et b.

Casio

MENU, STAT

Saisir les valeurs x_i et y_i dans L1 et L2

CALC, puis régler dans SET :

2-VAR Xlist : L1, 2-VAR Ylist : L2 et 2-VAR Freq : 1

EXE puis REG X (puis $ax + b$ pour certaines calculatrices) .

Lire alors a et b.

Exemple 12 1°) Reprendre la série du I. Déterminer à la calculatrice (*arrondir à 0,1 près*) une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.

2°) Représenter cette droite dans le repère en utilisant le point méthode qui suit.

III.3 Point méthode : Tracer une droite dans un repère orthogonal à partir de son équation

On considère une droite dans un repère orthogonal dont l'équation est de la forme $y = ax + b$.

- La méthode classique à choisir deux valeurs de x (cohérentes avec les unités du graphique) et de calculer « le » y correspondant en utilisant la relation $y = ax + b$.

- Une méthode avec la calculatrice consiste à utiliser le menu $\boxed{\text{TABLE}}$ (Casio) ou $\boxed{\text{f(x)}}$ (TI) ; saisir l'équation de la droite ; régler les valuers de x avec la touche $\boxed{\text{SET}}$ (Casio) ou $\boxed{\text{def table}}$ (TI) (cohérentes avec les unités du graphique) ; editer le tableau de valeurs.

  Dans la liste, choisir deux couples de coordonnées « faciles » à placer.

III.4 Utilisation des ajustements : estimations et prévisions

SAVOIR :
$\longrightarrow$ On utilise l'équation de la droite pour donner une ***estimation de couples de valeurs*** ne figurant pas dans la série statistique de départ.

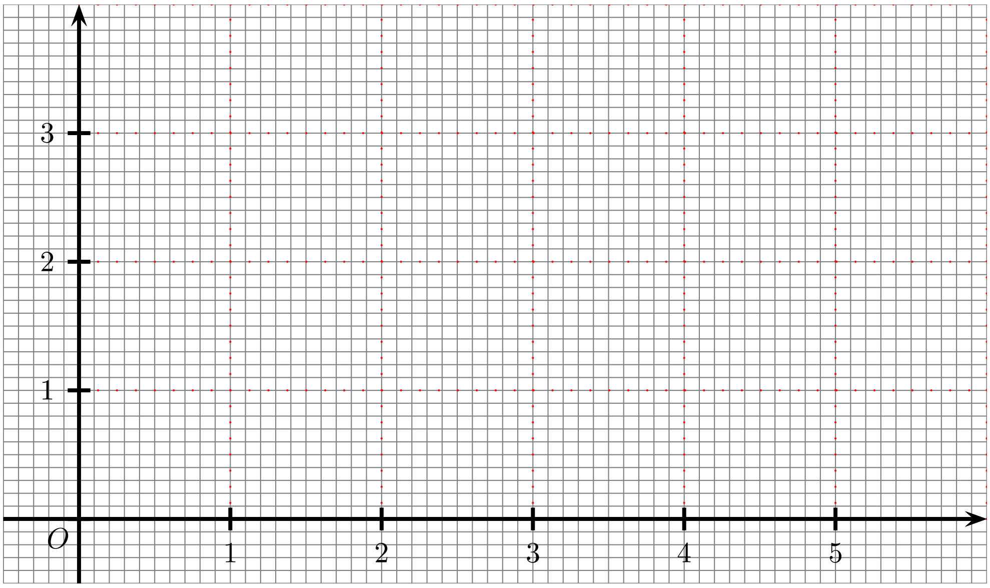
Exemple 13 1°) En utilisant la droite de régression (trouvée à l'exemple précédent), ESTIMER la charge à laquelle peut résister une pièce dont la teneur en carbone est 0,72%.
2°) De la même manière, PREVOIR la teneur en carbone d'une pièce qui résisterait à 100 kg de charge.

IV ACTIVITÉ en lien avec l'enseignement de Mercatique

IV.1 Étude d'un exemple

Calcul du chiffre d'affaires prévisionnel de **Nespresso** pour les années 2015 et 2016.

Année	2011	2012	2013	2014
Rang de l'année x_i	1	2	3	4
Chiffre d'affaires en milliards d'euros y_i	2.9	3.3	2.7	2.4



1. Placer dans le graphique ci-dessus les points de coordonnées (x_i, y_i) correspondant aux valeurs du tableau.
   On dit alors que l'on a représenté un nuage de points. Ce nuage a-t-il une forme particulière ?
2. Tracé « au jugé » une droite passant au plus près de tous les points. À quelle relation peut-on s'attendre entre les valeurs de y_i et celles de x_i ?
3. Lire graphiquement les coefficients a et b de la relation précédente.
   a est le coefficient directeur ; b l'ordonnée à l'origine.
4. Le point moyen G d'un nuage est le point dont les coordonnées $(x_G; y_G)$ sont obtenues en faisant la moyenne des abscisses et des ordonnées des points du nuage. Est-il sur votre droite ?

IV.2 Ajustement affine

L'idée générale des statistiques à 2 variables est de rechercher s'il existe une relation entre les 2 caractères x et y.
Lorsque les points du nuage d'une série statistique sont approximativement alignés, on cherche une fonction affine qui exprime y en fonction de x.

IV.2.1 Méthode graphique

On trace ***au jugé*** une droite en s'efforçant d'équilibrer le nombre de points situés de part et d'autre. Cette méthode est peu précise.

IV.2.2 Méthode des moindres carrées

La calculatrice nous permet d'obtenir les coefficients a et b de la « meilleure » droite possible permettant d'ajuster le nuage de points.
Cette droite est appelée **droite de régression de y en x**.

Texas Instrument

$\boxed{\text{STAT}}$, $\boxed{\text{EDIT}}$.

Saisir les valeurs x_i et y_i L1 et L2

$\boxed{\text{STAT}}$, $\boxed{\text{CALC}}$, $\boxed{\text{LinReg(ax+b)}}$

Taper ensuite $\boxed{\text{L1 , L2 ENTER}}$

Lire alors a et b.

Casio

$\boxed{\text{MENU}}$, $\boxed{\text{STAT}}$

Saisir les valeurs x_i et y_i dans L1 et L2

$\boxed{\text{CALC}}$, puis régler dans $\boxed{\text{SET}}$:

2-VAR Xlist : L1, 2-VAR Ylist : L2 et 2-VAR Freq : 1

$\boxed{\text{EXE}}$ puis $\boxed{\text{REG}}$ $\boxed{\text{X}}$ (puis $\boxed{ax+b}$ pour certaines calculatrices) .

Lire alors a et b.

IV.3 Utilisation de la droite de régression

On utilise l'équation de la droite pour donner une ***estimation de couples de valeurs*** ne figurant pas dans la série statistique de départ. En particulier, cela permet de faire des prévisions.

Dans les exemples suivants, déterminer le chiffre d'affaires de chaque entreprise en 2018.

1. Ventes de véhicules légers de la marque *Renault* pour 2012

Années	Ventes
2012	463019
2013	517093
2014	497820
2015	455705

2. L'entreprise *La Rose*
   Évolution du chiffre d'affaires de *La Rose* en millions d'euros :

Années	2012	2013	2014	2015
Chiffre d'affaires	53	68	71	94

3. Le restaurant *Sushiroi*
   Évolution du chiffre d'affaires de *Sushiroi* en milliers d'euros :

Années	2012	2013	2014	2015
Chiffre d'affaires	250	360	370	350

Chapitre 4

Dérivation

Sommaire

• ○ • ○ •

I $f(a)$, $f'(a)$, et tangente.

f est une fonction, a est un nombre.

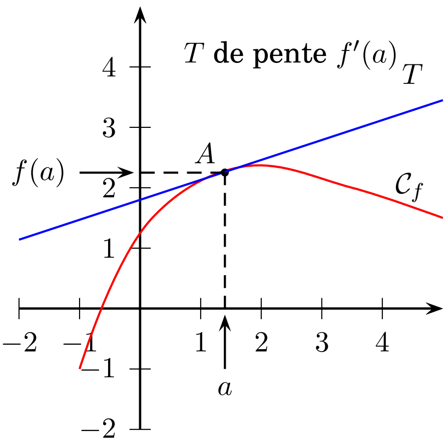
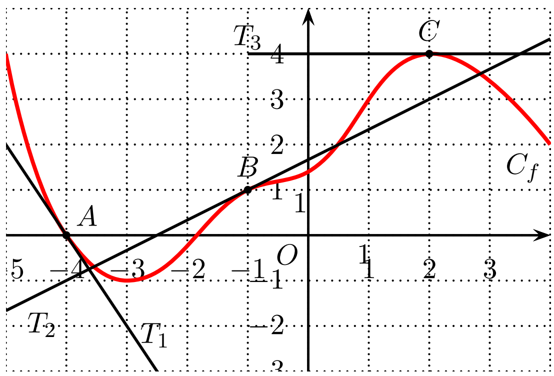


IMAGE : $\longrightarrow$ $f(a)$ est **l'image de** a.
NOMBRE DERIVE : $\longrightarrow$ $f'(a)$ est le **nombre dérivé de** f **en** a
TANGENTE : $\longrightarrow$ La tangente à la courbe de f en un point A d'abscisse a est la droite : • passant par le point A, et • dont le coefficient directeur est le nombre dérivé de f en a : $f'(a)$.

Remarque 1 On dit "Coefficient directeur" ou "pente". *(Voir le III pour le rappel de la méthode de lecture graphique de la pente).*

Exemple 14



$f(-4) = \ldots$ $\qquad$ $f'(-4) = \ldots$

$f(-1) = \ldots$ $\qquad$ $f'(-1) = \ldots$

$f(2) = \ldots$ $\qquad$ $f'(2) = \ldots$

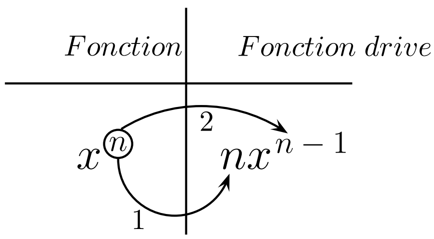
II Fonction dérivée f'

Pour chaque fonction f, il existe une fonction dérivée $f' : x \mapsto f'(x)$ qui permet de **calculer** le nombre dérivé d'un réel x.

II.1 Formules de dérivation pour les "fonctions usuelles".

Fonction	Fonction dérivée
$f(x) =$nombre k	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = x^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Pour retenir la 5^{me} formule :



Pour dériver x^n :

1. l'exposant n est multiplié par x ;
2. l'exposant du x est diminué de 1 (n devient $n-1$).

II.2 Formules pour dériver des fonctions plus complexes :

f, u et v sont des fonctions, k est un nombre.

Fonction	Fonction dérivée
$f(x) = k \times u(x)$ (k est un nombre)	$f'(x) = k \times u'(x)$
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

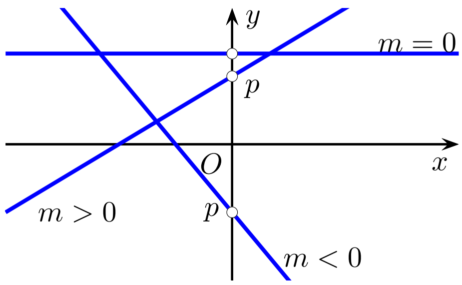
Exemple 15 Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^3 + x^2 - 5$
2. $B(x) = x + 5 + \dfrac{1}{x}$
3. $j(x) = 3x^2 - 2x$
4. $C(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{1 + 2x}$

III Petit retour sur les fonctions affines et les équations de droites

Une droite a une équation de la forme $y = mx + p$.

- m est le **"coefficient directeur"** ou la **"pente"** de la droite d. Sur un graphique : $pente = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
- p est **l'ordonnée à l'origine de la droite** : la droite coupe l'axe des ordonnées "en p", ou "au point de coordonnées $(0; p)$"



Pour calculer p quand on connait m, on utilise les coordonnées d'un des points de la droite.

Une droite d'équation $y = mx + p$ est toujours reliée à la **fonction affine** suivante : $x \mapsto mx + p$

Signe d'une fonction affine : Une fonction affine non constante s'annule toujours **une** fois et change toujours **une fois** de signe.

Si $m > 0$ la fonction affine est strictement positive "à droite du zéro".

Par exemple, faisons le tableau de signe de $5x + 10$:

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $5x + 10$		0	

(on place -2 sur la première ligne car $5x + 10$ s'annule quand $x = -2$)

Si $m < 0$ la fonction affine est strictement positive "à gauche du zéro".

Par exemple, faisons le tableau de signe de $-x - 12$:

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $-x - 12$		0	

(on place -12 sur la première ligne car $-x - 12$ s'annule quand $x = -12$)

Chapitre 5

Étude de fonctions

Sommaire

• ○ • ○ •

I Étapes de l'étude d'une fonction.

SAVOIR : Sur un intervalle, le <u>signe</u> de la fonction dérivée <u>f'</u> est lié au sens de <u>variation</u> de la fonction <u>f</u>, et réciproquement.

- La fonction $f'(x)$ est positive $(+) \Longleftrightarrow f$ est *croissante* sur l'intervalle.
- La fonction $f'(x)$ est négative $(-) \Longleftrightarrow$ alors f est ***dé****croissante* sur l'intervalle.

Voici donc les étapes pour étudier une fonction f (= prévoir ses variations et ses extrema) :

1. Calculer l'expression de la fonction dérivée f'.
2. Etudier le signe de la fonction dérivée f'.
3. En déduire les variations de la fonction f dans un tableau de variations.

II Rappel des méthodes pour trouver le signe d'expressions

II.1 Trouver le signe d'une expression du premier degré (forme $ax+b$)

1. Recherche de la valeur qui donne 0 comme image : $ax+b=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{a}$
2. **Deux tableaux sont possibles**, ils se distinguent par le **signe de** a, coefficient de x dans $ax+b$.

- Si $a>0$, le tableau se remplit suivant cet ordre $\boxed{-\ 0\ +}$
- Si $a<0$, le tableau se remplit suivant cet ordre $\boxed{+\ 0\ -}$

Exemple 16 Soit la fonction $f(x)=-x^2+4x-5$.

1°) Calculer $f'(x)=...$

2°) Etudier le signe de $f'(x)$:

3°) En déduire les variations de f sur $[0;7]$:

x	0 7
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

EXERCICE 1 Déterminer les variations de la fonction f définie sur $[-6;5]$ par $g(x)=3x^2+4x+1$.

II.2 Trouver le signe d'une expression du second degré (forme $ax^2 + bx + c$)

1. Recherche des valeurs éventuelles donnant 0 comme image : $ax^2 + bx + c = 0$

   Méthode : On calcule $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$, et ensuite :
   - Si $\Delta > 0$, deux valeurs de x, appelées "racines", donnent 0 comme image : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$;
   - Si $\Delta = 0$, une seule valeur donne 0 : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$;
   - Si $\Delta < 0$, l'expression ne s'annule pas.

2. Modèles de tableau

   Si $\Delta > 0$, il y a 2 zéros et on met le signe de a à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$		$\cdots$		$\cdots$		$+\infty$
Signe		*signe de a*	0	*signe oppos de a*	0	*signe de a*	

   Si $\Delta = 0$, il y a un seul zéro et le signe de a de part et d'autre.

x	$-\infty$		$\cdots$		$+\infty$
Signe		*signe de a*	0	*signe de a*	

   Si $\Delta < 0$, il n'y a que le signe de a

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe		*Signe de a*	

Exemple 17 Soit la fonction $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$.

1°) Calculer $f'(x) = ...$

2°) Etudier le signe de $f'(x)$:

3°) En déduire les variations de f sur $[0; 10]$:

x	0	10
Signe de $f'(x)$		
Variations de f		

EXERCICE 2 Déterminer les variations de la fonction f définie sur $[-6; 5]$ par $g(x) = -x^3 + 3x + 2$.

III Exemple d'étude de fonction : situation concrète

On s'intéresse à la propagation d'une maladie dans une ville de 130000 habitants. La fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 40] par

$$f(t) = -30t^2 + 1200t + 4000$$

modélise le nombre de personnes touchées par la maladie au bout de t jours de suivi de la propagation.

Partie A : Étude graphique

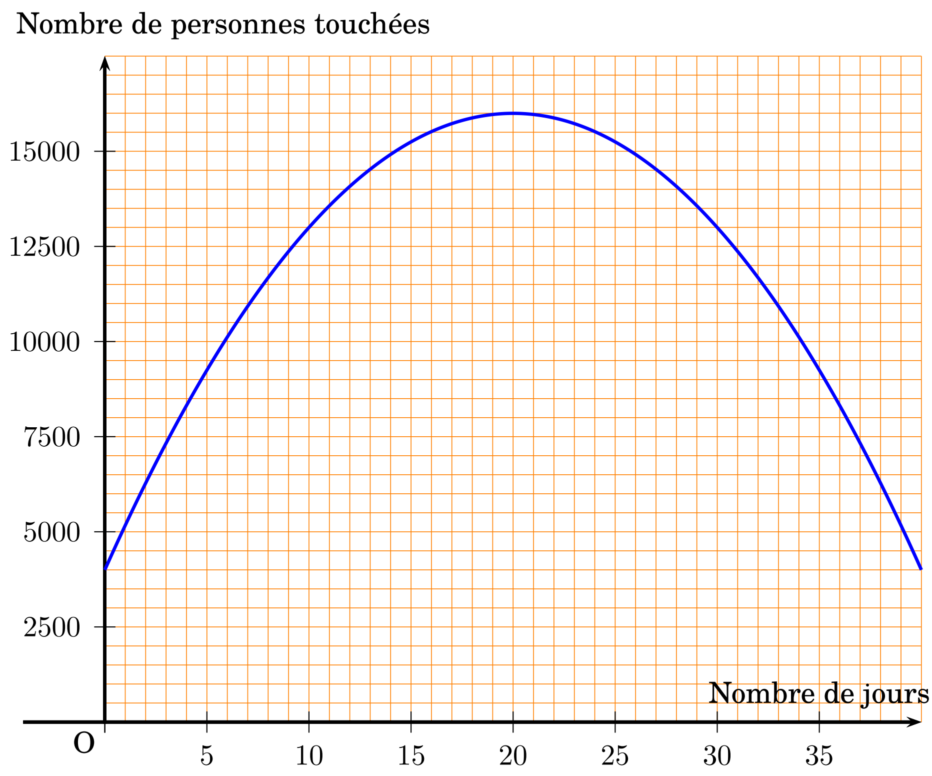
On donne en annexe ci-dessous la courbe représentative de la fonction f.
Répondre aux questions ci-dessous par lecture graphique.
Les résultats seront justifiés en commentant le travail réalisé sur le graphique et en y laissant les traits de construction.

1. Déterminer le nombre de personnes touchées par la maladie au bout de 15 jours de suivi de la propagation.
2. Le conseil municipal a décidé de fermer les crêches de la ville lorsque plus de 10 % de la population est touchée par la maladie. Pendant combien de jours les crêches ont-elles été fermées ?

Partie B : Étude algébrique

1. Déterminer, pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 40], l'expression de $f'(t)$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
2. Étudier le signe de $f'(t)$ pour t variant dans l'intervalle [0 ; 40].
   En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. Au bout de combien de jours de suivi de la propagation le nombre de personnes touchées par la maladie est-il maximal ?
   Combien y a-t-il alors de personnes touchées ?

ANNEXE



Chapitre 6

Probabilités conditionnelles

Sommaire

I Pour bien commencer

I.1 Avec un tableau

On compte 67 femmes dans une entreprise de 160 personnes.
Parmi les personnes de cette entreprise, il y a 32 cadres dont 15 femmes.

	Femmes	**Hommes**	**Total**
Cadres	15		32
Autres employés			
Total	67		160

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessus.
2. Parmi les 160 personnes de cette entreprise, on en choisit une au hasard. On considère les événements suivants :
   - F : « la personne choisie est une femme. » ;
   - C : « la personne choisie est un cadre. »

(a) Définir par une phrase les événements : $\overline{C}$, $F \cap C$ et $F \cap \overline{C}$.

(b) Calculer les probabilités $P(F)$, $P(C)$, $P(\overline{C})$, $P(F \cap C)$ et $P(F \cap \overline{C})$.

3(a) **La personne choisie est un cadre de l'entreprise.** Quelle est la probabilité que ce soit une femme ? *On note $P_C(F)$ cette probabilité.*

(b) Calculer $\dfrac{P(F \cap C)}{P(C)}$. Que constate-t-on ?

4(a) **On choisit une femme parmi les personnes de l'entreprise**. Quelle est la probabilité qu'elle soit un cadre ? *On note $P_F(C)$ cette probabilité.*

(b) Explique pourquoi on obtient le résultat de la question précédente en calculant $\dfrac{P(F \cap C)}{P(F)}$.

5. Que représentent en termes de probabilités les quotients $\dfrac{52}{67}$ et $\dfrac{52}{128}$?

I.2 Avec un arbre

On dispose de deux urnes, contenant cinq boules de couleur rouge ou verte. L'urne U_1 contient 3 rouges et 2 vertes, l'urne U_2 contient 4 rouges et 1 verte. Tom lance un dé supposé bien équilibré. S'il obtient 1 ou 6, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1, sinon il extrait une boule de l'urne U_2.
On nomme :
- A l'événement « Obtenir **un** ou **six** avec le dé » ;
- R l'événement « Obtenir une boule rouge » ;
- V l'événement « Obtenir une boule verte » .

1(a) Calculer la probabilité de l'événement A. En déduire $p(\overline{A})$.

(b) Tom tire au hasard une boule dans U_1 : quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ? verte ? Reprendre la question précédente dans le cas où le tirage s'effectue dans U_2.

2(a) Illustrer la situation par un arbre et y reporter les probabilités connues.

(b) Utiliser les règles de calcul dans un arbre pour calculer les probabilités des événements suivants E : « la boule provient de U_1 et elle est rouge » ; F : « la boule provient de U_2 et elle est rouge ».

3. Quelle est la probabilité qu'à ce jeu, Tom obtienne une boule rouge ? une boule verte ?

• ○ • ○ •

II Vocabulaire et propriétés

- $\boxed{\text{Un événement } A}$ se décrit par une phrase.

- $\boxed{P(A)}$ (se lit « probabilité de A ») désigne la probabilité que l'événement A se réalise ; c'est un nombre positif compris entre 0 et 1.
  Dans une situtation d'équiprobabilité (chaque résultat de l'expérience a la même probabilité de se réaliser), on utilise la formule de calcul d'une proportion pour calculer : $P(A) = \dfrac{n_A}{n_E}$.

- **L'événement contraire** (encadré) d'un événement A se note $\overline{A}$ (se lit « A barre »). $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$

Exemple 18 Si A est l'événement « être un garçon » et $P(A) = 0,6$, alors $\overline{A}$ sera l'événement « Ne pas être un garçon » ou « être une fille » et $P(\overline{A}) = 1 - 0,6 = 0,4$.

- **Intersection et Réunion :**
  $\boxed{A \cap B = \text{« } A \textit{ inter } B \text{ »}}$ se réalise quand les événements A **ET** B se réalisent ensemble (« simultanément ») .

  $\boxed{A \cup B = \text{« } A \textit{ union } B \text{ »}}$ se réalise quand l'événement A **OU** l'événement B se réalise (ou les 2).

  Propriété fondamentale : $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

- **Probabilités conditionnelles :** $\boxed{P_B(A) = \text{« } \textit{Probabilité de } A \textit{ sachant } B \text{ »}}$. C'est la probabilité que l'événement A se réalise, sachant que l'événement B est *déjà* réalisé.

Exemple 19 Si 12% des élèves de terminale aiment le Rap, alors la probabilité qu'un lycéen aime le Rap, *sachant qu'il est en te*
est $0,12$. Mais la probabilité qu'un lycéen quelconque aime le rap n'est sans doute pas $0,12$.

- **Relations entre les probabilités dans le cas général :**

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)} \qquad \text{soit aussi} \qquad \boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

- **Cas des événements indépendants :**
  A et B sont 2 événements indépendants si et seulement si $\boxed{P(A) = P_B(A)}$ ou $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$

  Autrement dit la probabilité de l'événement A ne change pas quand l'événement B est réalisé.

III Utilisation des tableaux de probabilités

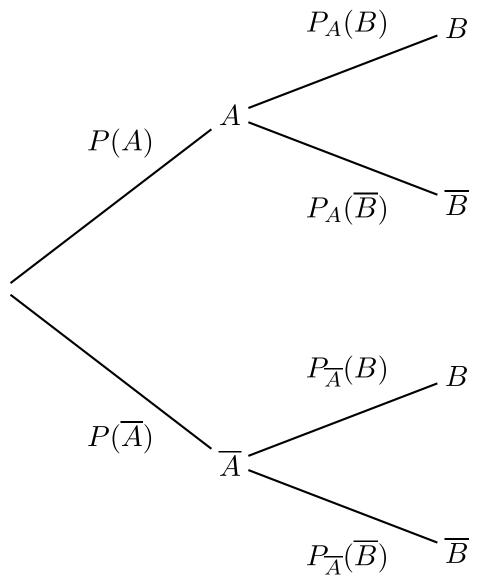
	B	$\overline{B}$	Total
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Total	$P(B)$	$P(\overline{B})$	**100 %**

Dans un tableau n'apparaissent pas les probabilités conditionnelles.

On les calculera alors avec la formule : $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

ou encore : $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

IV Utilisation des arbres de probabilités



SAVOIR : Règles de calculs sur un arbre de probabilités :

$\longrightarrow$ On indique au dessus de chaque branche la probabilité d'y passer.

$\longrightarrow$ La somme des probabilités de toutes les branches partant d'un même noeud est égale à 1.

$\longrightarrow$ Les probabilités qui n'apparaissent pas dans l'arbre :

1. Les probabilités d'intersection : on les calcule en faisant les **produits** suivants : $\boxed{P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)}$ (On multiplie les probabilités des branches du chemin qui mene à l'intersection.)
2. La probabilité de l'événement B ; on la calcule avec la **somme** suivante : $\boxed{P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)}$.
3. la probabilité conditionnelle $P_B(A)$; on la calcule avec la formule : $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Exemple 20 Compléter l'arbre ci-dessus sachant que : la probabilité d'obtenir l'événement A est 40%. Si A est réalisé, la probabilité d'obtenir B est 10%, Si A n'est pas réalisé, la probabilité d'obtenir B est 20%.
Traduire les données de l'énoncé par des probabilités :.....

Probabilité que A et B se réalisent en même temps : $P(.......)=...$

Probabilité que B se réalise : $P(....)=...$

Si B est réalisé, probabilité que A se réalis : $P...(.......)=...$

Chapitre 7

La loi binomiale

Sommaire

I Pour bien commencer

Contexte : `On considère l'expérience aléatoire suivante :`

On lance un dé équilibré et on regarde la face obtenue.

On s'intéresse à l'issue : « obtenir un $\boxed{6}$. »

La probabilité d'obtenir un $\boxed{6}$ lors d'un lancer de ce dé est : ....

I.1 Répétition de 3 lancers.

On lance à présent 3 fois de suite le dé de manière indépendante et on s'intéresse au nombre de fois que l'on obtient $\boxed{6}$.

1. Construire l'arbre pondéré de probabilités illustrant cette expérience :

2. On appelle X, la variable qui compte le nombre de $\boxed{6}$ obtenus sur ces 3 lancers.

   (a) Comment peut-on noter, en utilisant de X, l'événement « obtenir deux $\boxed{6}$ parmi ces 3 lancers » ?

   (b) En utilisant l'arbre de probabilités, calculer la probabilité de cet événement.

3. Quelles sont les autres valeurs possibles de la variable X ? Calculer la probabilité des ces événements.

I.2 Répétitions de 5 lancers.

On lance à présent 5 fois de suite le dé bien équilibré, et on note X, la variable qui compte le nombre de $\boxed{6}$ obtenus sur ces 5 lancers.

On s'intéresse à l'événement obtenir « trois $\boxed{6}$ parmi ces 5 lancers », c'est-à-dire, l'événement : ....

On souhaite alors calculer la probabilité suivante : ....

1. Comment pouvez-vous calculer cette probabilité ? Quel inconvénient rencontrez-vous ?

2. **Une alternative** : l'utilisation de la calculatrice. Pour cela nous avons besoin de répérer des paramètres liés à notre expérience.
   (a) Quelle est la probabilité p d'obtenir un $\boxed{6}$ lors d'un lancer ? $p = ...$

   (b) Quel est le nombre n de répétitions de l'expérience aléatoire ? $n = ..$

   (c) On appelle k le nombre de $\boxed{6}$ obtenus lors de nos lancers, ici on souhaite que $k = ...$

On calcule la probabilité de l'événement $P(X=k)$ à l'aide de la calculatrice :

Casio

Dans $\boxed{\text{MENU STAT}}$, $\boxed{\text{DIST}}$, $\boxed{\text{BINM}}$

- Pour calculer $P(X=k)$, taper **Bpd** puis $\boxed{\text{var}}$ et compléter : x est la valeur de k, Numtrial est n et p.

Texas Instrument

Dans $\boxed{\text{2de}}$, $\boxed{\text{Var}}$, pour obtenir le menu $\boxed{\text{Distrib}}$.

- Pour calculer $P(X=k)$, taper **binomFdp** (n,p,k)

I.3 Un exercice

Dans une exploitation agricole, lors de vaccinations précédentes, 20% des veaux avaient présent une réaction forte au vaccin. Cette fois, parmi tous les veaux de l'exploitation, on en vaccine 15 de façon indépendante. On appelle X le nombre de veaux qui ont eu une réaction forte

1. Combien de veaux sont susceptibles d'avoir une réaction forte ?
2. Quelle est la probabilité que 3 veaux aient une réaction forte ?
3. Quelle est la probabilité que 5 veaux aient une réaction forte ? *arrondir les probabilités à 0,001 près*

II En résumé

On s'intéresse dans cette leçon à la répétition d'épreuves **identiques** et **indépendantes** les unes des autres.
Chaque épreuve n'a que **deux issues possibles** : une issue qualifiée de `succés` et l'autre d'`échec`.

Dans cette situation, il est difficile de représenter la répétition d'épreuves par un arbre de probabilités.

Le CADRE de la LOI BINOMIALE :

On a une répétition de n expériences identiques et indépendantes les unes des autres.	$\rightarrow$ paramètre n
On repère la probabilité p de l'événement auquel on s'intéresse (le *"succès"*).	$\rightarrow$ paramètre p
On calcule la probabilité : $\rightarrow$ d'avoir un certain nombre k de succès $\rightarrow$ d'avoir **au plus** k succès. $\rightarrow$ d'avoir **plus de** k succès.	La variable X compte les succès. $\rightarrow P(X = k)$ $\rightarrow P(X \leqslant k)$ $\rightarrow P(X > k) = 1 - P(X \leqslant k)$

Les probabilités $p(X = k)$ et $p(X \leqslant k)$ s'obtiennent directement avec la calculatrice :

T.I	Casio
2nd DISTR	MENU STAT DIST BINM
pour $p(X = k) \longrightarrow$: binomFdp pour $p(X \leqslant k) \longrightarrow$: binomFRep	pour $p(X = k) \longrightarrow$: Bpd pour $p(X \leqslant k) \longrightarrow$: Bcd Régler DATA à "variable" (F2)
Compléter les paramètres dans l'ordre : n, p, k	Compléter les paramètres : x : valeur de k numtrial : n puis p.

III Exemples

III.1 Un lustre

Un lustre doit être équipé de 12 ampoules. Elles sont prises dans un très grand lot où 97% des ampoules fonctionnent.
Calculer la probabilité que 11 des ampoules du lustre s'allument.

`RETENIR LA REDACTION :`

Il y a .... répétitions identiques et indépendantes de l'expérience *« prendre une ampoule dans le lot »* (.... = ...).
Pour chaque ampoule, la probabilité de fonctionner (le « succès ») est .... = ...

Donc on est dans le cadre de la loi .... de paramètres ....

La probabilité d'avoir 11 ampoules correctes est alors

$p(X = 11) \approx$ .... $\longrightarrow$(calculatrice :...)

III.2 Une urne

Une urne contient 100 boules dont 38 vertes. On effectue un tirage successif de 50 boules prises au hasard avec remise et on s'intéresse au nombre X de boules vertes tirées.

1. Quelle loi suit la variable X ? Donner ses paramètres.

2. Quelles valeurs peut prendre X ?

3. Calculer la probabilité de tirer 18 boules vertes.

4. Calculer la probabilité de prendre au plus 15 boules vertes.

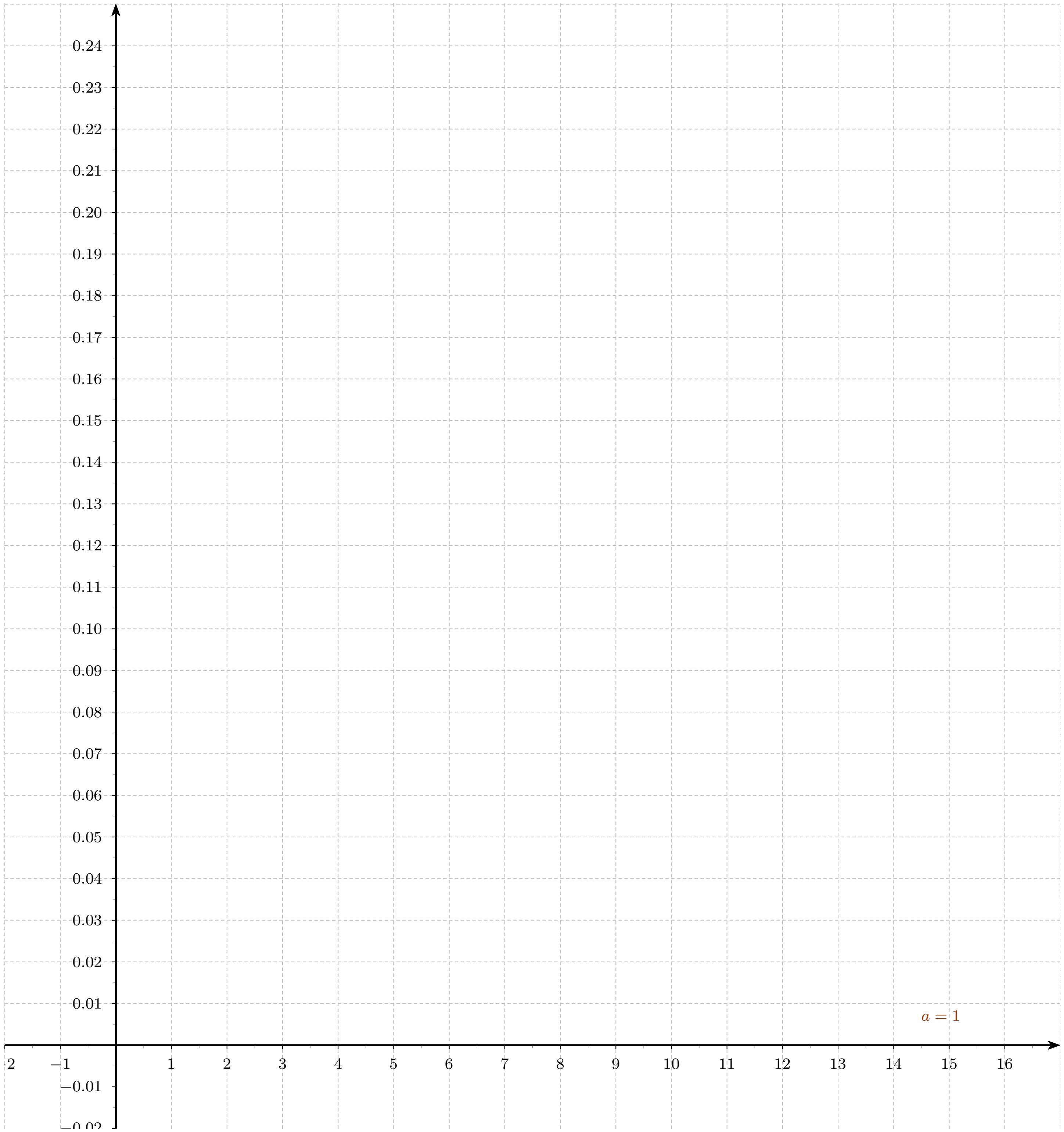
5. Calculer la probabilité de prendre plus de 20 boules vertes.

III.3 Une usine produit des pots de confiture

Une usine produit des pots de confiture. On sait que 10% des pots de la production totale sont trop remplis.

On prélève au hasard 15 pots dans la production totale (on considère les prélèvements indépendants).
Calculer la probabilité que parmi les 15 pots, il y ait 3 pots trop remplis.
Puis calculer la probabilité qu'il y ait au moins 12 pots trop remplis.

`Représentation des différentes probabilités par des rectangles dont`
`les aires sont égales aux probabilités` $P(X = k)$

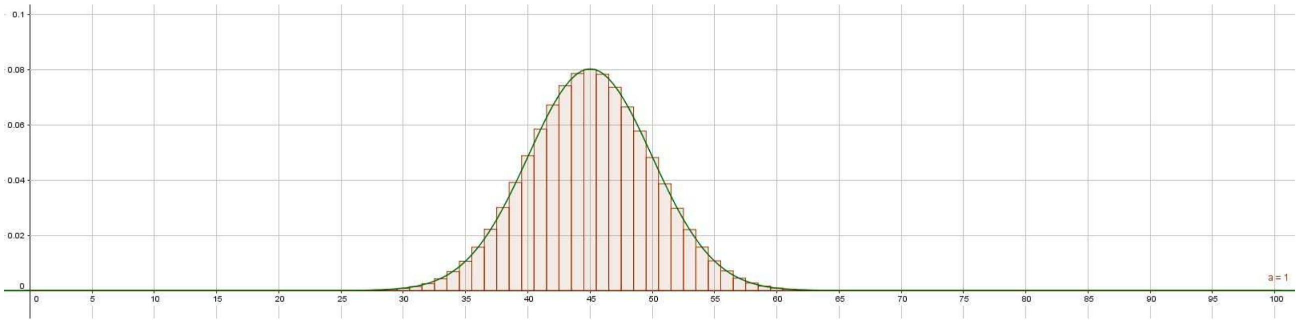

0.24
0.23
0.22
0.21
0.20
0.19
0.18
0.17
0.16
0.15
0.14
0.13
0.12
0.11
0.10
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
$a = 1$
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
−0.01

Chapitre 8

La loi normale

Sommaire

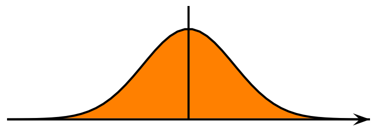
I Définition et courbe



Le diagramme en bâtons d'une loi binomiale (de paramètres n, et p) peut être approché par une courbe "en cloche" (quand n est grand et p pas trop voisin de 0 ou 1).

.

Cette courbe est celle d'une nouvelle loi de probabilité appelée LOI NORMALE.



Une loi normale a 2 paramètres :
• μ (« *mu* ») est l'**espérance mathématique** (ou **moyenne**),
• σ (« *sigma* ») est l'**écart type**.

Si une variable aléatoire X suit une loi normale, et si on répète un grand nombre de fois la mesure de X, alors

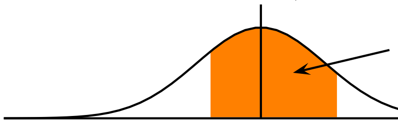
$\longrightarrow$ **un grand nombre de valeurs se situe autour de l'espérance** μ,

$\longrightarrow$ et **on en trouve de moins en moins en s'éloignant de part et d'autre de l'espérance (la dispersion se mesure avec l'écart-type** σ).

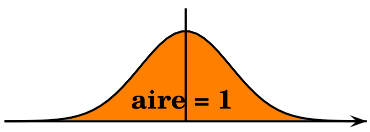
II Lien entre la courbe et les probabilités

Propriétés : Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale.

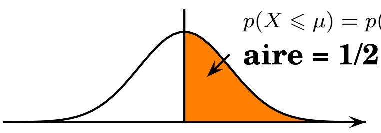
- $p(a \leqslant X \leqslant b)$ est l'aire du domaine coloré. (rappel : $p(a \leqslant X \leqslant b)$ se lit *"probabilité que X soit entre a et b".)*

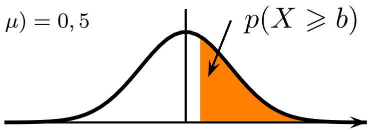


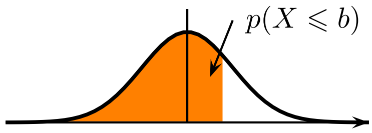
- **L'aire totale sous la courbe en cloche est égale à 1 et la courbe admet un axe de symétrie.**



- De même, on a les correspondances suivantes entre les aires colorées et les probabilités :







TOUS LES RESULTATS des probabilités se trouvent avec la calculatrice :

T.I	Casio
$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{DISTR}}$ $\boxed{\text{Normalcdf}}$ ou $\boxed{\text{NormalFreq}}$ Compléter les paramètres dans l'ordre : lower, upper, μ et σ.	$\boxed{\text{MENU}}$ $\boxed{\text{STAT}}$ $\boxed{\text{DIST}}$ $\boxed{\text{NORM}}$ $\boxed{\text{Ncd}}$ Compléter les paramètres : *lower*, *upper*, σ et μ

pour $p(a \leqslant X \leqslant b) \longrightarrow$ *lower* $= a$ et *upper*$= b$.
pour $p(X \leqslant k) \longrightarrow$ *lower* = un nombre très petit, par exemple -10000 et *upper* $= k$
pour $p(X \geqslant k) \longrightarrow$ *lower* $= k$ et *upper* = un nombre très grand, par exemple 10000

III Situation Concrète

Une PME fabrique des boules de billard. On note X la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre (en millimètres).
On suppose que X suit une loi normale d'espérance $61,25$ et d'écart-type $0,2$.

1(a) Calculer à 10^{-4} près, la probabilité $p(X \leqslant 61)$.

(b) Dans un lot de 200 boules de billard, à combien peut-on estimer le nombre de boules de diamètre inférieur à 61 millimètres ?

2(a) Une boule est dite de « premier » choix si son diamètre (en millimètres) appartient à l'intervalle $[61; 61,5]$, sinon elle est dite « de second choix ». Calculer, à 10^{-4} près, la probabilité qu'une boule prélevée au hasard dans la production soit de premier choix.

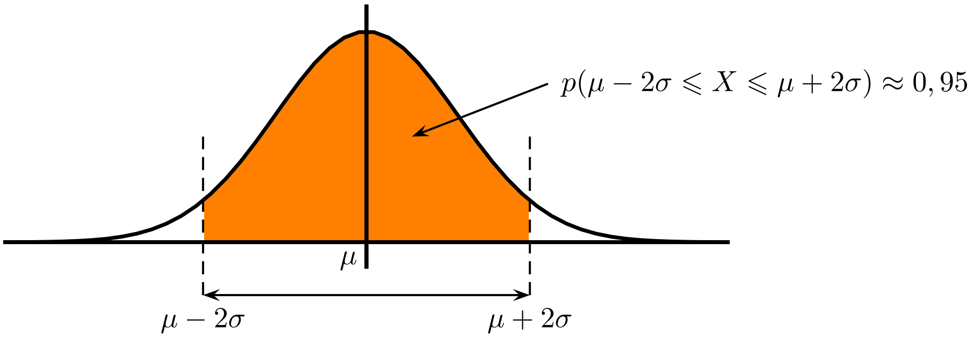
(b) En déduire la probabilité qu'une boule prélevée au hasard dans la production soit de second choix.

IV Intervalle de fluctuation 2σ d'une loi normale.

La probabilité de l'événement "$X \in [\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$" vaut environ 0,95.

Environ 95% des valeurs prises par X sont dans l'intervalle $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$.

L'intervalle $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$ s'appelle l'intervalle de fluctuation 2σ.



Exemples d'utilisation :

1. Une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 50 et d'écart-type 0,5. Donner sans utiliser la calculatrice un intervalle qui contient environ 95% des valeurs prises par X.

2. Une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 100 et d'écart-type 5. Donner sans utiliser la calculatrice la probabilité que X soit dans l'intervalle $[90; 110]$.

3. Une usine fabrique des rondelles. Une rondelle est conforme quand son diamètre (en mm) appartient à l'intervalle $[89,6; 90,4]$. On sait que la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard soit conforme est 0,95.
   On note X la variable aléatoire qui mesure le diamètre d'un rondelle prise au hasard dans la production. X suit une loi normale d'espérance 90 et d'écart-type σ.
   Calculer la valeur de σ.

Chapitre 9

Intervalles de fluctuation et de confiance

Sommaire

I Échantillonnage dans une population.

$\boxed{\text{On connaît la proportion } p \text{ d'apparition d'un caractère dans une population.}}$

Alors, si on prélève des échantillons de taille n dans la population, environ 95 % des fréquences d'apparition (f) du caractère dans chaque échantillon seront dans l'intervalle $\boxed{\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]}$.

C'est ce qu'on appelle $\boxed{\text{l'intervalle de fluctuation asymptotique à au moins 95 \% de la fréquence } f}$.

(Cela est valable si on a les 3 conditions : $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.)

On dit « asymptotique » car : plus n (la taille des échantillons) est grand, plus l'intervalle est petit.

Exemple d'utilisation :
Dans une maternité, on sait qu'il nait en moyenne 51 % de garçons. On fait le point sur la proportion de garçons toutes les 100 naissances.

Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à au moins 95 % de la fréquence des garçons dans les échantillons de taille 100.

II Test d'hypothèse, prise de décision à partir d'un échantillon.

$\boxed{\text{On ne connaît pas la proportion } p \text{ d'apparition d'un caractère dans une population.}}$

$\boxed{\text{mais on fait l'hypothèse que } p \text{ a une certaine valeur}}$, et
on se demande si on peut accepter cette hypothèse ou non.

On prélève un échantillon de taille n dans la population, et on calcule la fréquence d'apparition du caractère dans l'échantillon : f.
L'intervalle de fluctuation est $I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Alors **la règle de décision est la suivante** :

- Si $f \in I$, alors on accepte l'hypothèse que p a bien la valeur supposée, "au seuil de confiance de 95 %".
- Si $f \notin I$, alors rejette l'hypothèse que p a bien la valeur supposée, "au seuil de confiance de 95 %".

(Cette méthode est valable toujours sous les 3 conditions : $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$).

Exemple d'utilisation : On fait l'hypothèse que 40 % des individus sont allergiques à un médicament. On réalise un échantillon de taille 200 et on observe que 58 personnes sont allergiques au médicament.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique I à au moins 95 % de la fréquence des personnes allergiques dans les échantillons de taille 200.

2. Enoncer la règle de décision permettant d'accepter ou non l'hypothèse $p = 0,4$. Dire alors si on peut accepter l'hypothèse.

III Estimation d'une proportion p inconnue : intervalle de confiance.

On ne connaît pas la proportion p d'apparition d'un caractère dans une population.

mais on connaît sa fréquence f d'appartition dans un échantillon de taille n.
On souhaite alors donner un intervalle dans lequel p a 95% de chance de se trouver.

L'intervalle est alors $\boxed{\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]}$.
C'est ce qu'on appelle l'intervalle de confiance au niveau de confiance 95%.

(Cette méthode est valable dès que n est suffisamment grand).

Ici encore, plus l'échantillon sera grand (n grand), plus l'intervalle sera petit.
On arrondit par défaut la borne inférieure de l'intervalle, et par excès la borne supérieure.

Exemple d'utilisation : Une entreprise souhaite estimer la proportion p de clients satisfaits dans l'ensemble de ses clients. Pour cela, elle fait un sondage auprès d'un échantillon de 500 clients. 410 d'entre eux se disent satisfaits.

1. Estimer la proportion p de clients satisfaits dans l'ensemble de la clientèle par un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %. (arrondir les bornes à 0,01 près.)

2. Est-il possible que $p = 0,75$?