Tstmg

Dérivation : nombre dérivé, fonction dérivé, fonction affine

L4

I $f(a)$, $f'(a)$, et tangente.

f est une fonction, a est un nombre.

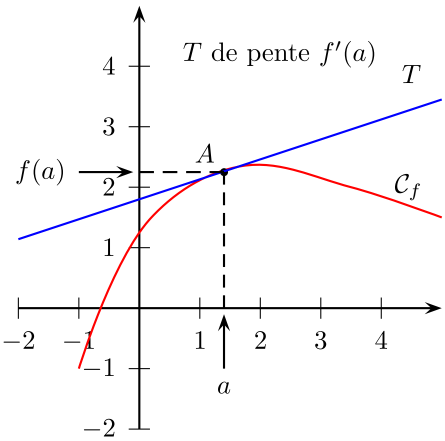


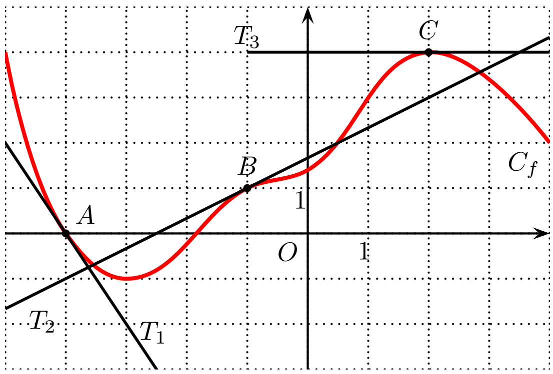
IMAGE : $\longrightarrow$ $f(a)$ est **l'image de** a.

NOMBRE DERIVE : $\longrightarrow$ $f'(a)$ est le **nombre dérivé de** f **en** a

TANGENTE : $\longrightarrow$ La tangente à la courbe de f en un point A d'abscisse a est la droite :
- passant par le point A, et
- dont le coefficient directeur est le nombre dérivé de f en a : $f'(a)$.

Remarque
On dit "Coefficient directeur" ou "pente". *(Voir le III pour le rappel de la méthode de lecture graphique de la pente).*

Exemple



$f(-4) = ...$ $\qquad$ $f'(-4) = ...$

$f(-1) = ...$ $\qquad$ $f'(-1) = ...$

$f(2) = ...$ $\qquad$ $f'(2) = ...$

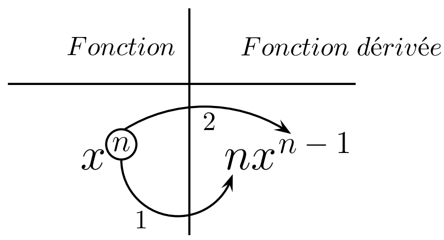
II Fonction dérivée f'

Pour chaque fonction f, il existe une fonction dérivée $f' : x \mapsto f'(x)$ qui permet de <u>**calculer**</u> le nombre dérivé d'un réel x.

II.1 Voici les formules de dérivation qui permettent de trouver les fonctions dérivées des "fonctions usuelles".

Fonction	Fonction dérivée
$f(x) =$nombre k	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = x^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Pour retenir la $5^{ème}$ formule :



Pour dériver x^n :
1. l'exposant n est multiplié par x ;
2. l'exposant du x est diminué de 1 (n devient $n - 1$).

II.2 Voici les formules permetttant de dériver des fonctions plus complexes :

f, u et v sont des fonctions, k est un nombre.

Fonction	Fonction dérivée
$f(x) = k \times u(x)$ (k est un nombre)	$f'(x) = k \times u'(x)$
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

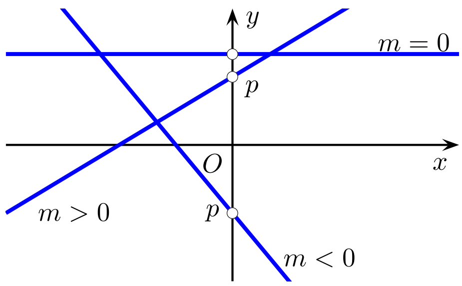
Exemple
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^3 + x^2 - 5$
2. $B(x) = x + 5 + \dfrac{1}{x}$
3. $j(x) = 3x^2 - 2x$
4. $C(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{1 + 2x}$

III Petit retour sur les fonctions affines et les équations de droites

Une droite a une équation de la forme $y = mx + p$.

- m est le **"coefficient directeur"** ou la **"pente"** de la droite d. Sur un graphique : $pente = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
- p est **l'ordonnée à l'origine de la droite** : la droite coupe l'axe des ordonnées "en p", ou "au point de coordonnées $(0; p)$"



Pour calculer p quand on connait m, on utilise les coordonnées d'un des points de la droite.

Une droite d'équation $y = mx + p$ est toujours reliée à la **fonction affine** suivante : $x \mapsto mx + p$

Signe d'une fonction affine : Une fonction affine non constante s'annule toujours **une** fois et change toujours **une fois** de signe.

Si $m > 0$ la fonction affine est strictement positive "à droite du zéro".

Par exemple, faisons le tableau de signe de $5x + 10$:

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $5x + 10$		0	

(on place -2 sur la première ligne car $5x + 10$ s'annule quand $x = -2$)

Si $m < 0$ la fonction affine est strictement positive "à gauche du zéro".

Par exemple, faisons le tableau de signe de $-x - 12$:

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $-x - 12$		0	

(on place -12 sur la première ligne car $-x - 12$ s'annule quand $x = -12$)