I Variations d'une fonction

I.1 A partir de tableaux de valeurs

x	$f(x) = -2,5x + 16$
...	...
-10	41
-9	38,5
-8	36
...	...
6	1
7	$-1,5$
8	-4
9	$-6,5$
...	...

x	$f(x) = 0,25x + 5$
...	...
-10	2,5
-9	2,75
-8	3
...	...
6	6,5
7	6,75
8	7
9	$7,25$
...	...

x	$f(x) = 2x^2 - 5$
...	...
-6	67
-5	45
-4	27
-3	13
...	...
0	-5
1	-3
2	3
3	13
...	...

I.2 Premières définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

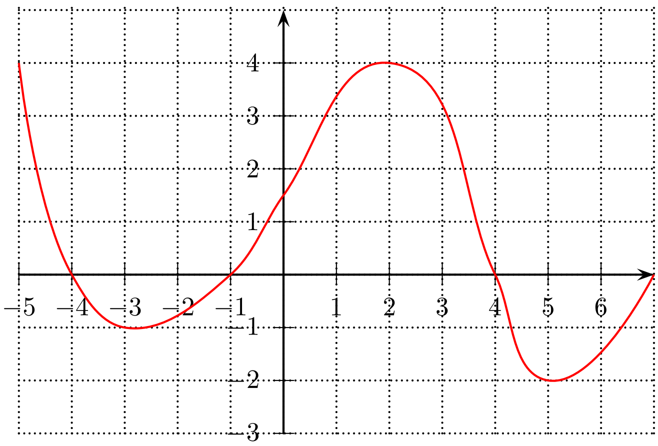
- On dit que f est une fonction **croissante** sur I : l'image $f(x)$ **augmente** si, et seulement si, x **augmente**.

  Exemple 1 Si t est la fonction taille d'un enfant en fonction de x son âge : ......

- On dit que f est une fonction **décroissante** sur I : l'image $f(x)$ **diminue** si, et seulement si, x **augmente**.

  Exemple 2 Si v est la fonction volume d'un réservoir d'essence d'une voiture en fonction de x le nombre de kilomètres parcourus : ......

I.3 Courbe et variations



Lorsque l'on regarde dans le sens de lecture (de gauche à droite), la courbe d'une fonction croissante "monte" et celle d'une fonction décroissante "descend".

- La fonction est décroissante sur $[-5; -3]$ et sur ......
- ......

Définition 1 *Le tableau de variations d'une fonction f définie sur I est une représentation schématique des variations de la fonction.*

Exemple :

x	...	...	...	...	...
Variations de f					

I.4 Extremum d'une fonction

Pour une fonction, un extremum est soit un maximum, soit un minimum.

- Le **maximum** d'une fonction f sur un intervalle I est la plus **grande** valeur d'image prise par $f(x)$ pour $x \in I$. Graphiquement, c'est l'ordonnée du point le plus "haut" de la courbe de f sur I.
- Le **minimum** d'une fonction f sur un intervalle I est la plus **petite** valeur d'image prise par $f(x)$ pour $x \in I$. Graphiquement, c'est l'ordonnée du point le plus "bas" de la courbe de f sur I.

Exemple 3 On reprend la courbe et le tableau de variations de la fonction ci-dessus.

Le maximum de la fonction f sur $[-5;7]$ est $\dots$, il est obtenu pour $x = \dots$

Le minimum de la fonction f sur $[-5;7]$ est $\dots$, il est obtenu pour $x = \dots$

Le maximum de la fonction f sur $[4;7]$ est $\dots$, il est obtenu pour $x = \dots$

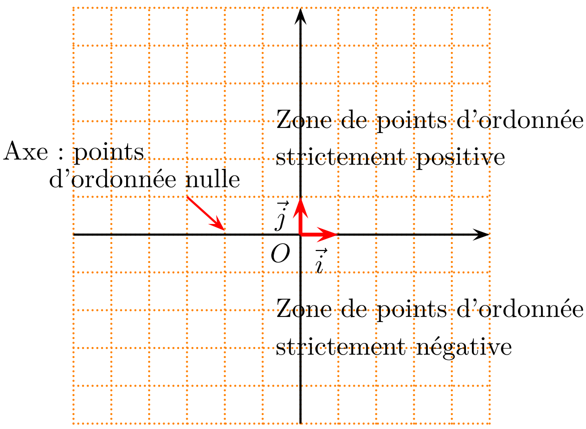
I.5 Définitions mathématiques

Dans toutes les définitions f est une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est strictement croissante sur I si : pour a et b dans I, $a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$.
- On dit que f est strictement décroissante sur I si : pour a et b dans I, $a < b \Longrightarrow f(a) > f(b)$.
- On dit que $f(x_0)$ est le maximum de f sur I si : pour tout x de I, $f(x) \leqslant f(x_0)$ et $x_0 \in I$.
- On dit que $f(x_1)$ est le minimum de f sur I si : pour tout x de I, $f(x) \geqslant f(x_1)$ et $x_1 \in I$.

Remarque 1 :
Une flèche qui "monte" dans un tableau de variations représente une fonction strictement croissante.
Une flèche qui "descend", représente une fonction strictement décroissante.

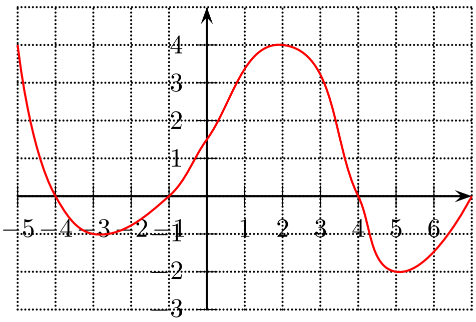
II Signe d'une fonction



Conséquences pour la courbe d'une fonction :

- $\dots$
- $\dots$

Exemple :



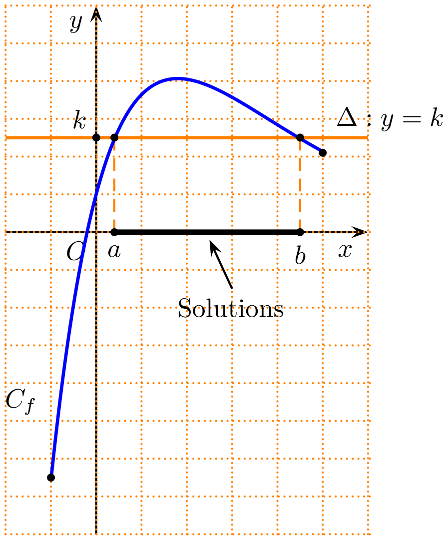
On résume le signe d'une fonction dans un tableau appelé tableau de signes

x	$\dots$ $\dots$ $\dots$ $\dots$ $\dots$
Signe de $f(x)$	

III Résolution graphique d'inéquations

Dans ce paragraphe, il s'agira de lecture graphique de solutions d'inéquations.

III.1 Inéquation du type $f(x) > k$ où f est une fonction définie sur I

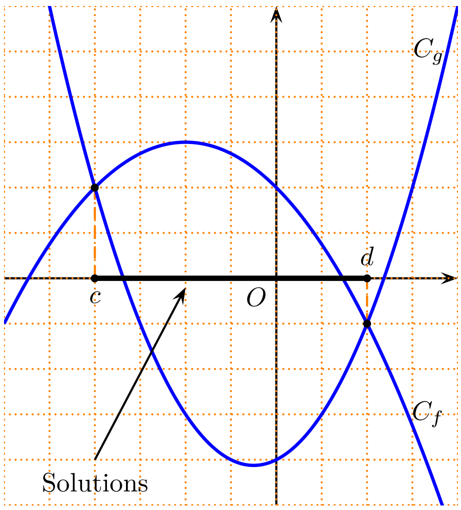


Les solutions de $f(x) > k$ (k réel) dans l'intervalle I sont les abscisses des points de C_f situés au-dessus de la droite Δ d'équation $y = k$.

$$\begin{cases} f(x) > k \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow x \in]a; b[$$

On écrit $\boxed{S =]a; b[}$

III.2 Inéquation du type $f(x) \geqslant g(x)$ où f et g sont des fonctions définies sur I



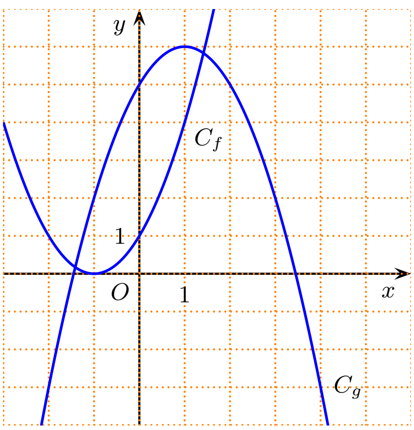
Les solutions de $f(x) \geqslant g(x)$ dans l'intervalle I sont les abscisses des points de C_f situés au dessus de ceux de C_g.

$$\begin{cases} f(x) \geqslant g(x) \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow x \in [c; d].$$

On écrit $\boxed{S = [c; d]}$

Remarque 2 Sur l'intervalle $[-6; 4]$ les solutions de $f(x) < g(x)$ sont . . .

Exemple 4 :



Les fonctions f et g sont définies sur $I = [-3; 6]$ par : $\begin{cases} f(x) = (x+1)^2 \\ g(x) = -x^2 + 2x + 5 \end{cases}$

1. Résoudre graphiquement $g(x) \geqslant 2$.
2. Résoudre graphiquement $f(x) < 1$ et $g(x) < -3$.
3. Donner graphiquement une valeur approchée des solutions de $f(x) \leqslant g(x)$.