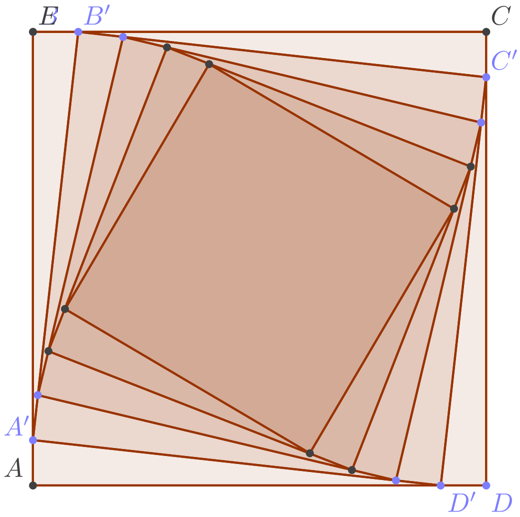
Farandole de carrés



I D'un carré à un autre

Soit $ABCD$ un carré. On construit les points A', B', C' et D' respectivement sur les segments $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$ tels que :

$$AA' = BB' = CC' = DD' = 1$$

1. À quelle condition sur AB la construction est-elle possible ?
2. Démontrer que $A'B'C'D'$ est un carré et que si $AB > 1$, alors $A'B' > 1$.

II Une suite de carrés

À partir d'un carré K_0 de côté 10 cm, on construit successivement des carrés $K_1, K_2, K_3, \dots$ comme sur la figure ci-dessus. Chacun d'eux ayant ses sommets sur les côtés du carré précédent et à 1 cm de ses sommets.

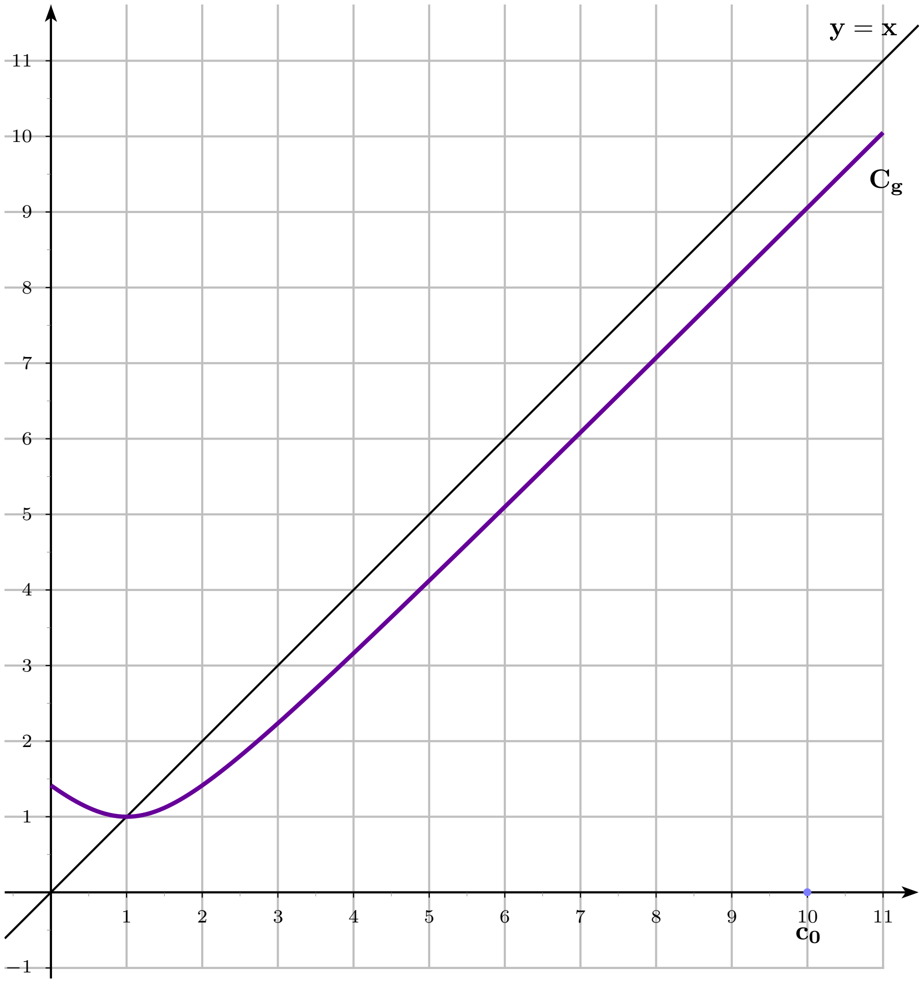
1. Peut-on continuer indifiniment une telle construction ? Justifier.
2. On définit la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$ en prenant comme terme général c_n la longueur du côté du carré K_n.
   (a) Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variation de la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$?
   (b) Écrire une relation de récurrence entre c_{n+1} et c_n. $(n \geqslant 0)$
   (c) Démontrer la conjecture précédente.
3. (a) En utilisant la calculatrice, calculer les 20 premiers termes de la suite.
   (b) À partir de quel rang n, a-t-on $c_n < 1,1$?
4. On introduit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ en posant, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = c_n - 1$.
   (a) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ et préciser le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{1+\sqrt{1+u_n^2}}$
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}u_n^2$, puis que $u_{n+3} \leqslant 10^{-2}u_n^8$.
   (d) En utilisant l'inégalité précédente et une inégalité vérifiée par u_{11}, prouver que $u_{17} < 10^{-82}$. Que peut-on en déduire sur la convergence des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(c_n)_{n\geqslant 0}$?

III Représentation graphique des termes de la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$

On note g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ telle que $c_{n+1} = g(c_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Préciser la fonction g.

2. En utilisant « l'outil graphique » suivant, représenter les termes de la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$ sur l'axe des abscisses.



3. Quelle remarque peut-on faire sur le sens de variation de la fonction g sur $[1; +\infty[$ et celui de la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$?