I. Définitions et propriétés du logarithme népérien

1. Définition

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

→ Quels que soient a et b strictement positifs, $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$

→ La fonction dérivée de la fonction logarithme népérien est la fonction inverse; ce qui s'écrit : pour $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$

2. Propriétés

- L'image de 1 par la fonction logarithme népérien est 0 ⇔ $\ln(1)=0$
- Image d'une puissance : $\ln(a^2)=\ln(a\times a)=\ln(a)+\ln(a)=2\ln(a)$

de façon générale , pour $a>0$ et n entier naturel, $\ln(a^n)=n\ln(a)$

- Image d'un quotient : Si $a>0$ et $b>0$, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$
- En particulier, $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right)=-\ln(b)$
- Image de la racine carrée d'un réel strictement positif

pour $a>0$, $\ln(\sqrt{a})=\dfrac{1}{2}\ln(a)$

3. Exercices

Écrire les réels suivants en fonction de $\ln(3)$ *et de* $\ln(7)$ *:*

$$\ln(21)\ ;\ \ln\left(\frac{7}{3}\right)\ ;\ \ln(63)\ ;\ \ln\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)\ ;\ \ln\left(\frac{3}{5}\right)+\ln(15)$$

Indiquer pour quelles valeurs de x les nombres suivants sont définis :

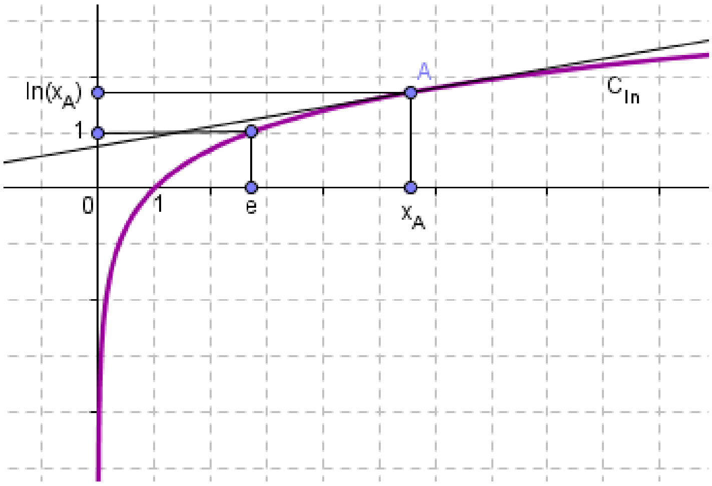
$A=\ln(x+2)$; $B=\ln(x+2)+\ln(x+1)$; $C=\ln[(x+2)(x+1)]$

II. Étude de la fonction logarithme népérien

1. Variations de la fonction $\ln$

La fonction logarithme népérien définie sur $]0;+\infty[$ admet pour dérivée la fonction inverse.

Pour $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ et comme $x>0$ alors $\dfrac{1}{x}>0$ donc la fonction logarithme népérien est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$



x	0	$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$
$f(x)$	|| $-\infty$	↗ $+\infty$

2. Signe de $\ln(x)$
   Grâce au tableau de variations précédent, on peut en déduire que :
   $\ln(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<1$;
   $\ln(x)=0 \Leftrightarrow x=1$;
   $\ln(x)>0 \Leftrightarrow x>1$
   $a<b \Leftrightarrow \ln(a)<\ln(b)$

3. <u>Nombre e</u>
   L'équation $\ln(x)=1$ admet pour unique solution le nombre e dont une valeur approchée est 2,718. $\ln(\mathrm{e})=1$ et $\ln(\mathrm{e}^n)=n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III. Dérivée de la fonction $x \rightarrow \ln(u(x))$ avec u(x)>0

Si la fonction u est dérivable et $u(x)>0$, la fonction composée $\ln(u)$ est dérivable. Sa dérivée s'obtient en calculant $u'(x)$ et en divisant le résultat par $u(x)$. On a : $(\ln u)'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Conséquence : puisque $u(x)>0$, $\ln'(u(x))$ et $u'(x)$ ont le même signe, donc les fonctions $\ln(u)$ et u varient dans le même sens.

Exercices :

- Indiquer l'ensemble I sur lequel $\ln(x+3)$ est calculable et résoudre sur I l'équation $\ln(x+3)=\ln(2)$
- Résoudre sur l'ensemble I l'équation $\ln(x+3)=1$
- Résoudre sur I l'inéquation $\ln(x+3)<2$

- Soit f la fonction définie sur $]0,5;+\infty[$ par $f(x)=x-3\ln(x)$. Déterminer le sens de variation de f sur $]0,5;+\infty[$.
- Soit la fonction g définie par $g(x)=\ln(x^2+1)$. Justifier que cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et déterminer son sens de variation. Dresser son tableau de variations sur $]-10;10[$. Tracer sa courbe représentative sur cet intervalle.
- Résoudre l'inéquation $\ln(x^2+1)<\ln(5)$. Quelle interprétation graphique peut-on donner du résultat obtenu ?

- Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)$ et la fonction g définie sur $]-\infty;3[$ par $g(x)=\ln(6-2x)$.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f en son point A d'abscisse e . Montrer que cette tangente passe par l'origine O.
- Justifier que $g(x)$ est calculable sur $]-\infty;3[$.
- Calculer la dérivée de g sur cet intervalle. Peut-on trouver un ou plusieurs points de la courbe de g en lequel la tangente ait un coefficient directeur 1 ?