EXERCICE 1 *(sur 6)*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ les suites définies par :

$$u_n = n^2 - 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = v_n + 2n + 1 \end{cases}$$

1. Calculer « manuellement » les trois premiers termes de chaque suite puis avec la calculatrice les 10 premiers termes. Quelle conjecture pouvez-vous émettre ?
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Démontrer la conjecture.

EXERCICE 2 *(sur 10)*

Dans chacun des cas suivants, calculer (manuellement ou la machine) les 5 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et étudier le sens de variation de cette suite en déterminant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

1. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2n + u_n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \left(u_n + \dfrac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$
3. $u_n = n - 2^n \quad$ (*aide* : $2^{n+1} - 2^n = 2^n$)

EXERCICE 3 *(sur 12)*

VRAI ou **FAUX**. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.

$\boxed{1}$ La suite de terme général $u_n = n^2$ est croissante.

$\boxed{2}$ Si (u_n) est croissante, alors la suite (v_n) définie par $v_n = -u_n$, est décroissante.

$\boxed{3}$ Si une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est telle que :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 2,\ u_2 = 3,\ u_3 = 4,$$

alors elle est croissante.

$\boxed{4}$ Si une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante alors,

pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n > u_{2n}$

$\boxed{5}$ Si, pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

$\boxed{6}$ Si, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+2}$, alors la suite (u_n) est croissante.

EXERCICE 4 *(sur 7)*

$(w_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $w_n = n^2 - 6n + 1$.

1. Définir sur $[0; +\infty[$ la fonction f associée à la suite (w_n).
2. Prouver que la fonction f est strictement croissante sur $[3; +\infty[$ (*on pourra étudier le signe de* $f(a) - f(b)$ *pour* $3 \leqslant a < b$)
3. Quel est le sens de variation de la suite (w_n) ?
4. Existe-t-il un rang n_0 à partir duquel $(n \geqslant n_0)$ $w_n \geqslant 316$?
5. Quelle limite peut-on conjecturer pour la suite (w_n) ?

EXERCICE 5 *(sur 6)*

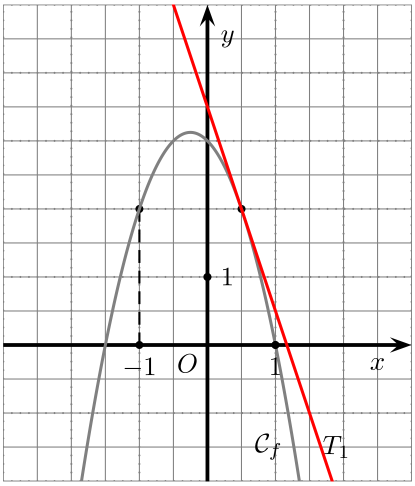
u est une fonction définie sur $[0;+\infty[$. Son tableau de variation est représenté ci-dessous :

x	0	1	2	$+\infty$
Variations de u	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	TS

Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions suivantes :

1. f définie par $f(x) = -2u(x) + 1$.
2. g définie par $g(x) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{u(x)} + 3$.
3. h définie par $h(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.

EXERCICE 6 *(sur 10)*

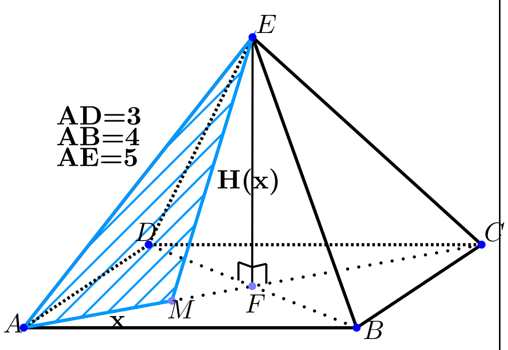


Ci-contre sont représentés :

▷ la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto -2x^2 - x + 3$ sur l'intervalle $[-3;3]$.
▷ la tangente T_1 à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $0,5$.

1. (a) Lire graphiquement $f(0,5)$ et $f'(0,5)$.
   (b) Quelle est l'équation de la tangente T_1 ?
2. On se place au point d'abscisse -1.
   (a) Exprimer le taux d'accroissement $\dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ de f en -1.
   (b) En déduire $f'(-1)$.
   (c) Prouver que l'équation de la droite T_2 tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 est :
   $$y = 3x + 5$$
   (d) Construire la droite T_2.

EXERCICE 7 *(sur 9)*



$EABCD$ est une pyramide régulière à base rectangulaire.
Les dimensions sont mentionnées sur la figure ci-contre avec $AE = BE = CE = DE$.
M est un point de la diagonale $[AC]$.
On pose $AM = x$.

1. Calculer la longueur AC.
2. En déduire l'intervalle auquel appartient x.
3. On définit sur l'intervalle $[0;5]$, la fonction H qui à x associe la longueur EM. On admet que
$$H : [0;5] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto H(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 25}$$
.
   (a) Préciser quelle est la fonction u telle que $H = \sqrt{u}$.
   (b) Sans justification, dresser le tableau de variations de u sur $[0;5]$.
   (c) En déduire les variations de la fonction H sur $[0;5]$. Dresser le tableau de variation de H sur $[0;5]$.
4. (a) À quelle longueur dans la pyramide correspond $H(2,5)$?
   (b) On rappelle que le volume d'une pyramide est égal à $\dfrac{\textit{base} \times \textit{hauteur}}{3}$. Calculer le volume de la pyramide $EABCD$.