## EXERCICE 1 :

On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

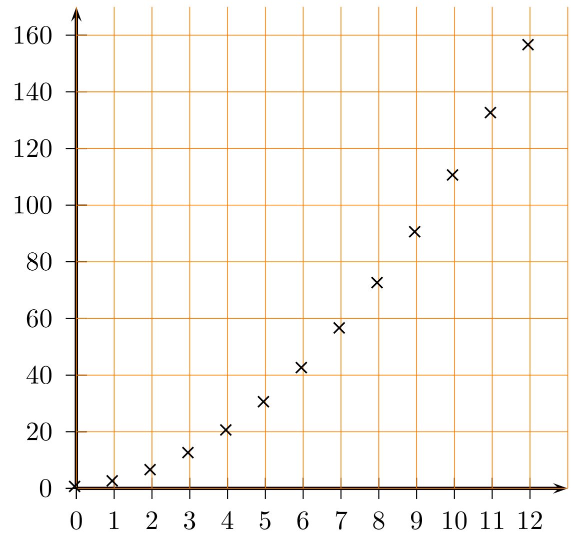
1. Calculer $u_1$ et $u_2$.
2. On considère les deux algorithmes suivants :

| **Algorithme 1** | | **Algorithme 2** | |
|---|---|---|---|
| **Variables :** | $n$ est un entier naturel<br>$u$ est un réel | **Variables :** | $n$ est un entier naturel<br>$u$ est un réel |
| **Entrée :** | Saisir la valeur de $n$ | **Entrée :** | Saisir la valeur de $n$ |
| **Traitement :** | $u$ prend la valeur 0<br>Pour $i$ allant de 1 à $n$ :<br>  $u$ prend la valeur $u + 2i + 2$<br>Fin Pour | **Traitement :** | $u$ prend la valeur 0<br>Pour $i$ allant de 0 à $n - 1$ :<br>  $u$ prend la valeur $u + 2i + 2$<br>Fin Pour |
| **Sortie :** | Afficher $u$ | **Sortie :** | Afficher $u$ |

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de $u_n$, la valeur de l'entier naturel $n$ étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où $n$ figure en abscisse et $u_n$ en ordonnée.

| $n$ | $u_n$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 2 |
| 2 | 6 |
| 3 | 12 |
| 4 | 20 |
| 5 | 30 |
| 6 | 42 |
| 7 | 56 |
| 8 | 72 |
| 9 | 90 |
| 10 | 110 |
| 11 | 132 |
| 12 | 156 |




   (a) Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite $(u_n)$ ?
   Démontrer cette conjecture.

   (b) La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels $a, b$ et $c$ tels que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = an^2 + bn + c$.
   Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de $a, b$ et $c$ à l'aide des informations fournies.

4. On définit, pour tout entier naturel $n$, la suite $(v_n)$ par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

   (a) Exprimer $v_n$ en fonction de l'entier naturel $n$.

   (b) On définit, pour tout entier naturel $n$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et on rappelle que $\sum_{k=0}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $S_n = (n+1)(n+2)$.

   (c) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

## EXERCICE 2 :

$f$ est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'$ est la fonction dérivée de la fonction $f$.

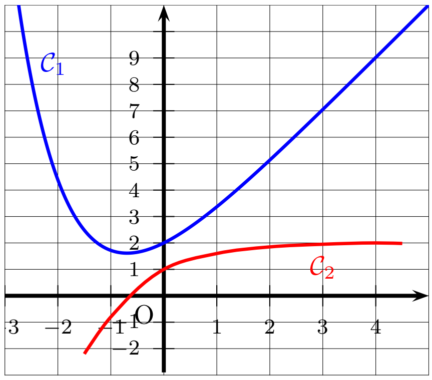
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction $f$ et $\mathcal{C}_2$ la courbe représentative de la fonction $f'$.

Le point A de coordonnées $(0 ; 2)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_1$.

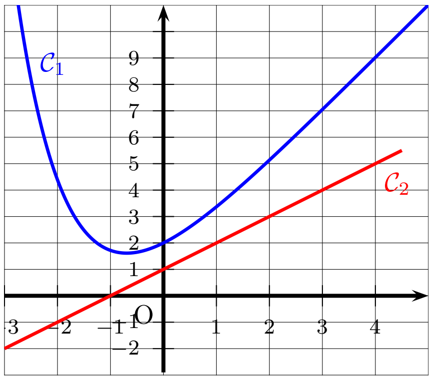
Le point B de coordonnées $(0 ; 1)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_2$.

1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative $\mathcal{C}_1$ de la fonction $f$. Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathcal{C}_2$ de la fonction dérivée $f'$ est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.

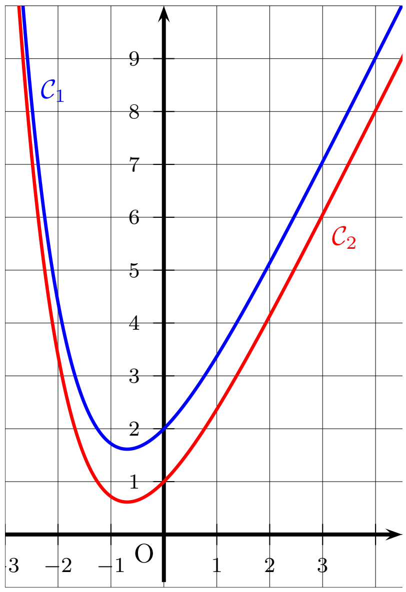
**Situation 1**




**Situation 2 ($\mathcal{C}_2$ est une droite)**




**Situation 3**




2. Déterminer l'équation réduite de la droite $\Delta$ tangente à la courbe $\mathcal{C}_1$ en A.

**EXERCICE 3** :

On considère la suite numérique $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

**Partie A : Conjecture**

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de $u_1$ et $u_2$.
2. Donner une valeur approchée à $10^{-5}$ près des termes $u_3$ et $u_4$.
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)$.

**Partie B : Validation des conjectures**

On considère la suite numérique $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$, par :
$v_n = u_n - 3$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n^2$.

2. On admet que, pour tout entier naturel $n$, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.
   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite $(v_n)$.
3. On note $\ell$ la limite de la suite $(v_n)$.
   On admet que $\ell$ appartient à l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.
   Déterminer la valeur de $\ell$.
4. Les conjectures faites dans la **partie A** sont-elles validées ?

**EXERCICE 4** :

101 p 129.