Le plan est muni d'un repère orthornormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
Les points A, B et C sont de coordonnées respectives $(8\,;\,2)$, $(4\,;\,-2)$ et $(0\,;\,2)$.
$\mathcal{C}$ est le cercle de centre A et passant par B.
P est le point de coordonnées $(p\,;\,0)$ où p est un réel quelconque et on appelle $\mathcal{D}_p$ la droite (CP).

I Préliminaires

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

Soit $M\,(x\,;\,y) \in \mathcal{C}$. Alors $(x-8)^2+(y-2)^2=(4-8)^2+(-2-2)^2 \Leftrightarrow (x-8)^2+(y-2)^2=32$.

2. Déterminer l'ensemble des points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ avec chacun des axes de coordonnées.

Cherchons d'abord l'ensemble des intersections de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses (Ox).
Soit $M\,(x\,;\,y) \in \mathcal{C} \cap (Ox)$. Alors les coordonnées de M sont solutions du système :

$$\begin{cases} (x-8)^2+(y-2)^2=32 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-8)^2+(0-2)^2=32 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-16x+36=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x=8-2\sqrt{7} \text{ ou } x=8+2\sqrt{7} \\ y=0 \end{cases}$$

On a donc $\mathcal{C} \cap (Ox) = \left\{(8-2\sqrt{7}\,;\,0)\,;\,(8+2\sqrt{7}\,;\,0)\right\}$.

Cherchons ensuite l'ensemble des intersections de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées (Oy).
Soit $M\,(x\,;\,y) \in \mathcal{C} \cap (Oy)$. Alors les coordonnées de M sont solutions du système :

$$\begin{cases} (x-8)^2+(y-2)^2=32 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (0-8)^2+(y-2)^2=32 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-4y+36=0 \\ x=0 \end{cases}$$

Or le trinôme $y^2-4y+36$ a un discriminant égal à -128, donc négatif donc il n'a pas de racine. On a donc $\mathcal{C} \cap (Oy) = \varnothing$.

II Deux cas particuliers

1. On pose $p=-6$.

   (a) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_{-6}$.

$\mathcal{D}_{-6}=(CP)$ où $C\,(0\,;\,2)$ et $P\,(-6\,;\,0)$.

$$\begin{aligned} M\,(x\,;\,y) \in (CP) &\Leftrightarrow \overrightarrow{CP}\,(-6\,;\,-2) \text{ et } \overrightarrow{CM}\,(x\,;\,y-2) \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow -6\times(y-2)-(-2)\times x=0 \text{ (condition de colinéarité)} \\ &\Leftrightarrow 2x-6y+12=0 \\ &\Leftrightarrow x-3y+6=0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}_{-6}$ est donc $x-3y+6=0$.

   (b) Déterminer l'ensemble des intersections de $\mathcal{D}_{-6}$ et de $\mathcal{C}$.

Soit $M\,(x\,;\,y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}_{-6}$. Alors les coordonnées de M sont solutions du système :

$$\begin{cases} (x-8)^2+(y-2)^2=32 \\ x-3y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3y-6-8)^2+(y-2)^2=32 \\ x=3y-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2-88y+168=0 \\ x=3y-6 \end{cases}$$

Or le trinôme $10y^2-88y+168$ a deux racines : $y_1=6$ et $y_2=2,8$, ce qui donne $x_1=3y_1-6=12$ et $x_2=3y_2-6=2,4$. On a donc $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}_{-6} = \{(12\,;\,6)\,;\,(2,4\,;\,2,8)\}$.

2. Mêmes questions avec $p=1$.

   (a) Cherchons d'abord une équation cartésienne de $\mathcal{D}_1$.

$\mathcal{D}_1 = (CP)$ où $C\,(0\,;\,2)$ et $P\,(1\,;\,0)$.

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (CP) &\Leftrightarrow \overrightarrow{CP}(1;-2) \text{ et } \overrightarrow{CM}\,(x\,;\,y-2) \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow 1\times(y-2)-(-2)\times x = 0 \text{ (condition de colinéarité)} \\ &\Leftrightarrow 2x+y-2=0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}_1$ est donc $2x+y-2=0$.

(b) Cherchons ensuite l'ensemble des intersections de $\mathcal{D}_1$ et de $\mathcal{C}$.

Soit $M\,(x\,;\,y) \in \mathcal{C}\cap\mathcal{D}_1$. Alors les coordonnées de M sont solutions du système :

$$\begin{cases} (x-8)^2+(y-2)^2=32 \\ 2x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-8)^2+(-2x+2-2)^2=32 \\ y=-2x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2-16x+32=0 \\ y=-2x+2 \end{cases}$$

Or le trinôme $5x^2-16x+32$ a discriminant égal à -384, donc négatif, il n'a donc pas de racines.
On a donc $\mathcal{C}\cap\mathcal{D}_1=\varnothing$.

III Cas général

Déterminer, par le calcul, le nombre d'intersections entre $\mathcal{D}_p$ et de $\mathcal{C}$ selon les valeurs de p.

1. Cherchons d'abord une équation cartésienne de $\mathcal{D}_p$.

$\mathcal{D}_p = (CP)$ où $C\,(0\,;\,2)$ et $P\,(p\,;\,0)$.

$$\begin{aligned} M\,(x\,;\,y) \in (CP) &\Leftrightarrow \overrightarrow{CP}\,(p\,;\,-2) \text{ et } \overrightarrow{CM}\,(x\,;\,y-2) \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow p\times(y-2)-(-2)\times x = 0 \text{ (condition de colinéarité)} \\ &\Leftrightarrow 2x+py-2p=0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}_p$ est donc $2x+py-2p=0$.

2. Cherchons ensuite l'ensemble des intersections de $\mathcal{D}_p$ et de $\mathcal{C}$.

Soit $M\,(x\,;\,y) \in \mathcal{C}\cap\mathcal{D}_p$. Alors les coordonnées de M sont solutions du système :

$$\begin{cases} (x-8)^2+(y-2)^2=32 \\ 2x+py-2p=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-8)^2+\left(2-\dfrac{2x}{p}-2\right)^2=32 \\ y=2-\dfrac{2x}{p} \text{ et } p\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-8)^2+\dfrac{4x^2}{p^2}=32 \\ y=2-\dfrac{2x}{p} \text{ et } p\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \left(1+\dfrac{4}{p^2}\right)x^2-16x+32=0 \\ y=2-\dfrac{2x}{p} \text{ et } p\neq 0 \end{cases}$$

Examinons le discriminant du trinôme pour $p\neq 0$; $\left(1+\dfrac{4}{p^2}\right)x^2-16x+32=0$

$$\begin{aligned} \Delta &= (-16)^2-4\times 32\left(1+\frac{4}{p^2}\right) \\ &= 256-128-\frac{512}{p^2} \\ &= 128-\frac{512}{p^2} \end{aligned}$$

- $\Delta>0 \Leftrightarrow 128-\dfrac{512}{p^2}>0 \Leftrightarrow p^2>4 \Leftrightarrow p\in]-\infty;-2[\cup]2:+\infty[\ : \mathcal{C}\cap\mathcal{D}_p=\{2\ points\}$
- $\Delta=0 \Leftrightarrow 128-\dfrac{512}{p^2}=0 \Leftrightarrow p^2=4 \Leftrightarrow p=-2$ ou $p=2$: $\mathcal{C}\cap\mathcal{D}_p=\{1\ point\}$
- $\Delta<0 \Leftrightarrow 128-\dfrac{512}{p^2}<0 \Leftrightarrow p^2<4 \Leftrightarrow p\in]-2;2[-\{0\}\ : \mathcal{C}\cap\mathcal{D}_p=\varnothing$
.
- Par ailleurs, pour $p=0$, la droite (CP) est l'axe des ordonnées et vu à la question 1.b, la droite ne coupe pas le cercle $\mathcal{C}$. Donc $\mathcal{C}\cap\mathcal{D}_p=\varnothing$ pour tout $p\in]-2;2[$.