I Fonctions

I.1 Une étude de signes

Corrigé en classe.

• ◯ •

I.2 Une étude de fonction

Soit la fonction h définie par $\begin{array}{rcl} h : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2-3}{\sqrt{x}} \end{array}$ où I est le plus grand intervalle contenu dans $\mathbb{R}$.

1. $I =]0;+\infty[$; Seuls les nombres strictement positifs ont une image.
2. h est un quotient de deux fonctions dérivables sur I donc h est dérivable sur I (le dénominateur de h ne s'annule pas sur I).
   $\forall x \in I,\ h'(x) = \dfrac{2x\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-3)}{x} = \dfrac{4x^2-x^2+3}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{3x^2+3}{2x\sqrt{x}}$
   De toute évidence, $f'(x) > 0$ sur I et f est strictement croissante sur I.
   On peut conjecturer (pour l'instant) avec GeoGebra (par exemple) que le tableau de variations complet de h est

x	0	x_λ	$+\infty$
Signe de $h'(x)$		$+$	
Variations de h	$-\infty$	λ	$+\infty$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, par simple lecture du tableau de variations (et parce que la fonction h dispose des caractéristiques requises), l'équation $h(x) = \lambda$ admet une unique solution que l'on note x_λ.
   (*comprendre une seule solution pour chaque valeur de* λ *différente*)

• ◯ •

II Suites

II.1 Calculs de termes d'une suite

Corrigé en classe.

• ◯ •

II.2 Jeu d'écritures

Corrigé en classe.

• ◯ •

II.3 Une suite somme

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

1. $u_1 = \frac{1}{1^2} = 1$, $u_2 = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$ et $u_3 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{49}{36}$.
2. $\forall n \geqslant 1$, la différence $u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$.
3. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

• ○ •

II.4 D'une suite à l'autre

On considère les suites définies par $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 6$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3$.

1. Avec la machine, on constate que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique. Sur une copie, on écrit :

$$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0 \text{ et } \frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$$

   En revanche, (v_n) **semble** géométrique de raison 3.

2. On peut donc penser qu'il existe une relation de récurrence entre v_n et v_{n+1} : $v_{n+1} = 3v_n$.

   On le justifie : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = (3u_n - 6) - 3 = 3u_n - 9 = 3(u_n - 3) = 3v_n$

3. Ainsi la forme explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : $\boxed{u_n =}\ v_n + 3 = v_0 q^n + 3 = \boxed{-2 \times 3^n + 3}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Reprendre l'exercice précédent avec $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$, puis $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

Réponse : (v_n) arithmétique de raison $\frac{1}{4}$ donc $v_n = v_0 + nr = 1 + \frac{n}{4}$ et de $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$, on déduit que :
$u_n = \frac{1}{v_n} + 1 = \frac{1}{1 + \frac{n}{4}} + 1 = \frac{n+8}{n+4}$.

• ○ •

III Vers la leçon 1

Corrigé en classe.