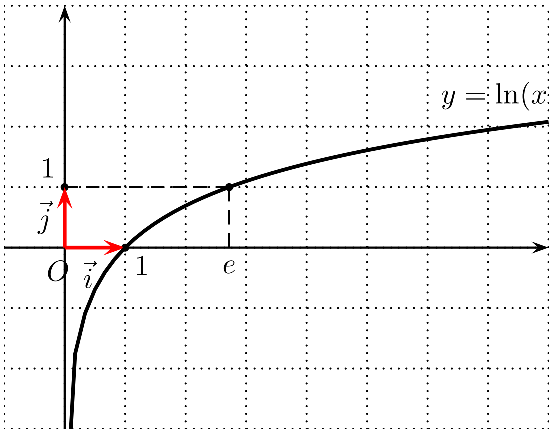
Propriété 1 La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction

- définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$: $\boxed{\ln(x) \text{ existe} \Leftrightarrow x > 0}$
- dont la fonction dérivée est $\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$
- dont la courbe et le tableau de variations sont les suivants :



x	0	1	$+\infty$
Signe de $\frac{1}{x}$	‖	+	
Variations de ln	‖ $-\infty$	0	$+\infty$

Rqe 1 A la calculatrice, on obtient des valeurs approchées de l'image de nombres réels, par ex : $\ln(2) \simeq 0,693$

Rqe 2 **Valeurs remarquables** : $\boxed{\ln(1) = 0}$ et $\boxed{\ln(e) = 1}$ (e est un nombre qui vaut $e \simeq 2,7$.)

Propriété 2 Soient a et b deux réels strictement positifs, on a la relation fondamentale suivante :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

On a aussi :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln(a^n) = n\ln(a) \quad (n \text{ est un entier naturel})$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \qquad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a).$$

Exemple 1 Transformations d'expressions numériques (sur les intervalles où elles sont définies) :

- ➔ $\ln(24) = \ln(2^3 \times 3) = \ln(2^3) + \ln(3) = 3\ln(2) + \ln(3)$.
- ➔ $\ln\left(\frac{16}{9}\right) = \ln(16) - \ln(9) = \ln(2^4) - \ln(3^2) = 4\ln(2) - 2\ln(3)$.
- ➔ $\ln(\sqrt{96}) = \frac{1}{2}\ln(96) = \frac{1}{2}\ln(2^5 \times 3) = \frac{1}{2}[5\ln(2) + \ln(3)]$.

Exemple 2 Transformations d'expressions algébriques (sur les intervalles où elles sont définies) :

- ➔ $\ln(x+3) + \ln(2x+1) = \ln[(x+3)(2x+1)] = \ln(2x^2 + 7x + 3)$.
- ➔ $\ln(3x) - \ln(3) + \ln(x^2) = \ln\left(\frac{3x \times x^2}{3}\right) = \ln(x^3) = 3\ln(x)$.
- ➔ $\ln(\sqrt{x-1}) = \frac{1}{2}\ln(x-1)$.

Exemple 3 Simplification d'expressions contenant e :

$\ln(e^2) = 2\ln(e) = 2$

$\ln(e^4) = 4\ln(e) = 4$

$\ln(e^{-1}) = -\ln(e) = -1$

$\ln(e^{-5}) = -5\ln(e) = -5.$

Propriété 3 Equations et inéquations :

$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$

$\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$

$\ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$.

$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$

Propriété 4 Fonctions f définies par $\boxed{f(x) = \ln(u(x))}$:

- La fonction f est définie quand $u(x) > 0$.
- La fonction f' se calcule avec la formule suivante : $(\ln u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple 4 Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(2x + 6)$.

- Ensemble de définition : $f(x) = \ln u(x)$ avec $u(x) = 2x + 6$.
  f est donc définie pour $u(x) > 0 \Leftrightarrow 2x + 6 > 0 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > -3$
  (on a divisé les 2 côtés de l'inégalité par 2, qui est positif, donc l'ordre n'a pas changé).
  Donc $\boxed{f \text{ est définie sur }]-3\ ;\ +\infty[}$.
- Calcul de la fonction dérivée : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec avec $u(x) = 2x + 6$ et $u'(x) = 2$

  soit $\boxed{f'(x) = \dfrac{2}{2x + 6}}$.