I Ensembles de nombres

1. Les entiers naturels
   $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels** (positifs et sans partie décimale) :
   $$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ...; 122; 123; ...\}$$
   C'est un ensemble infini. Chaque entier naturel n admet un successeur $n+1$.

2. Les entiers relatifs
   $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs** (positifs, négatifs et sans partie décimale) :
   $$\mathbb{Z} = \{...; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; ...\}$$
   $\mathbb{Z}$ contient $\mathbb{N}$ ce qui signifie que tout entier naturel est un entier relatif.

3. Les rationnels
   $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres **rationnels** : ce sont les nombres qui peuvent s'écrire comme le quotients de deux entiers relatifs. Parmi les rationnels :
   - Certains nombres ont une écriture décimale finie (qui s'arrête) : ce sont les **décimaux**. Leur ensemble est noté $\mathbb{D}$.

     Exemple 1

   - D'autres ont une écriture décimale périodique (qui se répète) et infinie : ce sont des **rationnels non décimaux**.

     Exemple 2

4. Les réels
   $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres **réels** : ce sont les nombres donnant l'abscisse de n'importe quel point sur une droite graduée.
   Parmi les réels, certains ne sont pas rationnels, on les qualifie **d'irrationnels**.

   Exemple 3

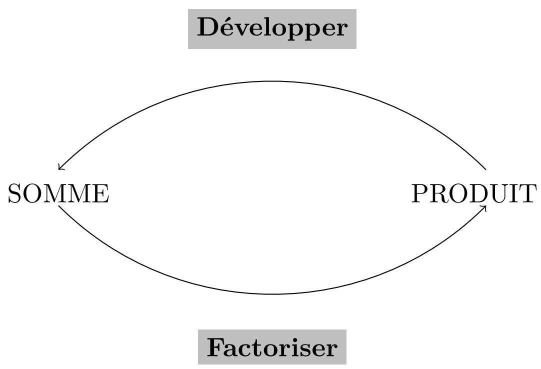
En résumé :

Les ensembles de nombres sont contenus les uns dans les autres :

On note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\subset$ signifie : "est inclus dans" ou "est contenu dans".

II Rappels des formules à connaître par coeur



Savoir : Une DIFFERENCE c'est comme une somme : $3-2=3+(-2)$

Savoir : Un QUOTIENT c'est comme un produit : $\dfrac{3}{2}=3\times\dfrac{1}{2}$

Distributivité simple :

- $k(a+b)=ka+kb$
- $\dfrac{a+b}{k}=\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k}$

Double distributivité :

- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

Egalités remarquables :

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Signe $-$ devant un produit ou un quotient :

- $-a\times b=(-a)\times b=a\times(-b)$
- $-\dfrac{a}{b}=\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}$

Que faire d'un signe $-$ devant une somme ?

- $-(a+b)=-a-b$
- $+(a+b)=a+b$

III Exemples de développements

Développer et réduire

1. $2x(3x-6)=$
2. $-3x^2(3x+5)+3x^2=$
3. $(-2x+5)(3x-6)=$
4. $-(x+2)(3x-1)=$
5. $2x-(3x-6)=$
6. $+(2x-6)-\dfrac{x}{3}=$
7. $\left(x-\dfrac{6}{7}\right)^2=$
8. $(3x+1)^2=$
9. $\left(\dfrac{x}{3}-1\right)\left(\dfrac{x}{3}+1\right)=$
10. $1-\dfrac{3x-2}{3}=$

IV Les intervalles

IV.1 Définition

Définition 1 :
Soient a et b deux nombres réels tels que $a<b$.
L'ensemble des nombres réels x tels que $a\leqslant x\leqslant b$ est appelé intervalle fermé de $\mathbb{R}$. On le note $[a;b]$.

Représentation graphique : $[a;b]$

Il existe d'autres types d'intervalles de $\mathbb{R}$, les voici résumés dans un tableau.

Intervalles de $\mathbb{R}$	Ensemble des x réels tels que	Représentation graphique

$-\infty$ et $+\infty$ sont des symboles et non des nombres. Crochets des intervalles toujours ouverts du côté de l'infini. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels se note également $]-\infty;+\infty[$.

EXERCICE 1 :

1. Quel encadrement vérifie x si $x \in]-2;3]$?

2. Si $x \in]-10;-1[$ alors ...

3. Si $x \in]-\infty;4]$ alors ...

EXERCICE 2 :

1. Résoudre l'inéquation $-2x-5 \leqslant 3x+11$ et donner l'ensemble des solutions sous forme d'un intervalle.

2. Résoudre l'inéquation $\dfrac{x-3}{4}+\dfrac{x}{6}<\dfrac{2x-3}{3}$ et donner l'ensemble des solutions sous forme d'un intervalle.

IV.2 Intersection de deux intervalles

Définition 2 : *L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et B. On note cette intersection $A \cap B$ et cela se lit " A inter B ".*

Remarque 1 : Il se peut qu'aucun élément n'appartienne aux deux ensembles, on écrit alors $A \cap B = \varnothing$ ($\varnothing$ se prononce "ensemble vide")

EXERCICE 3 : Déterminer $[-2;3] \cap]0;12]$, $]-\infty;0] \cap [1;2]$ puis $[2;5] \cap]2;+\infty[$

IV.3 Réunion de deux intervalles

Définition 3 *: La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou B. (les éléments peuvent éventuellement appartenir aux deux : "**ou**" inclusif)*
On note cette réunion $A \cup B$ et cela se lit " A union B ".

EXERCICE 4 : Déterminer $[-2;3] \cup]0;12]$, $]-\infty;0] \cup [1;2]$ puis $[2;5] \cup]2;+\infty[$

EXERCICE 5 : Quels sont les nombres x solutions de l'encadrement suivant : $-5 < 2(x-6)-(5-2x) \leqslant 4$?

EXERCICE 6 : Donner la négation de : $-3 < x \leqslant 7$

V Démontrer une égalité

Définition 4 *: Une égalité est une relation de la forme :*

*Pour tout $x \in D$, **expression** A (fonction de x) = **expression** B (focntion de x)*

où D est un intervalle ou une réunion d'intervalles ou réduit à un nombre.

Démontrer l'égalité, c'est prouver que pour n'importe lequel des x de D, l'égalité est vérifiée. Comme D contient un nombre infini de nombres, cela ne peut pas se faire au cas par cas.

Une technique : Écrire l'une des deux expressions et parvenir à l'autre après transformations (développer, factoriser, réduire au même dénominateur, ...) :

$$\text{expression } A = \ldots = \ldots = \ldots = \ldots = \text{expression } B$$

EXERCICE 7 Démontrer que pour $x \neq 3$, $\dfrac{2x+9}{x-3} = 2 + \dfrac{15}{x-3}$

EXERCICE 8 : UN NOMBRE SOLUTION D'UNE ÉQUATION.

Le nombre -2 est-il solution de l'équation $x^2 + 4x = 2(3x + 4)$?

Traduction : ...

TECHNIQUE :

$*$ Je remplace x par -2 dans le membre de gauche $\longrightarrow$

$*$ Je remplace x par -2 dans le membre de droite $\longrightarrow$

CONCLUSION :

EXERCICE 9 : Utilisation de la calculatrice

Conjecturer et prouver des égalités algébriques.

1. Compléter le tableau de valeurs suivant : vous pouvez utiliser la calculatrice en saisissant 2 formules et lire les résultats dans les 3 premières colonnes de la table de valeurs.

   PROCÉDURE CALCULATRICE :

x	-2	-1,5	-1	-0.5	0	0,5	1	1,5
$C(x) = (x+2)(2x-3) - (3x-2)^2$								
$D(x) = -7x^2 + 13x - 10$								

2. Quelle conjecture peut-on faire ?

3. Prouver cette conjecture.

EXERCICE 10 :

1. Calculer les valeurs de l'expression $D(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} - x$, pour x allant de 5 à 10 avec un pas de 0,5
2. Quelle conjecture peut-on faire ?
3. Prouver cette conjecture.

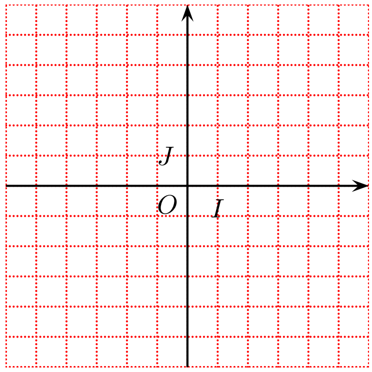
VI Repérage

VI.1 Coordonnées dans un repère

Définition 5 *Un repère du plan est la donnée de trois points non alignés O, I et J. La droite (OI) s'appelle l'axe des abscisses et la droite (OJ) s'appelle l'axe des ordonnées. O est l'origine du repère.*

Remarque 2 :
* Lorsque le triangle OIJ est rectangle, on dit que le repère est orthogonal.
* Lorsque le triangle OIJ est rectangle et isocèle, on dit que le repère est orthonormal. (cas le plus courant en mathématiques)

Propriété 1 :
Soit (O, I, J) un repère du plan. A tout point M du plan, on associe un unique couple $(x_M ; y_M)$ de nombres réels appelé couple de coordonnées. x_M est appelé **l'abscisse** de M et y_M est appelé **l'ordonnée** du point M.



Exemple 4

Voir documents de Mathsenligne.