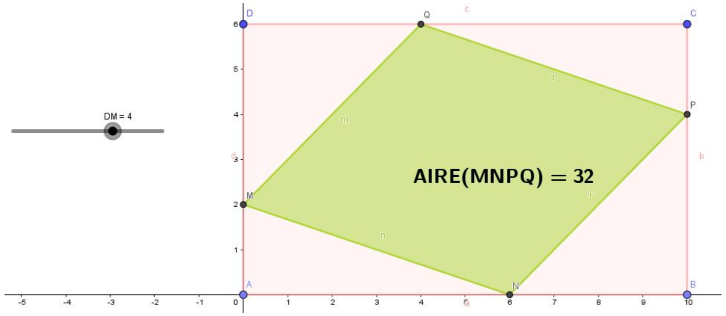
Exercices 81 p 71 ; 82(2) p 72

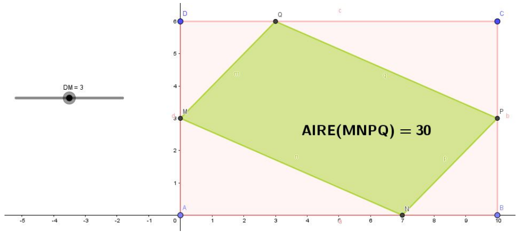
Exercice 1▷ 81 page 71

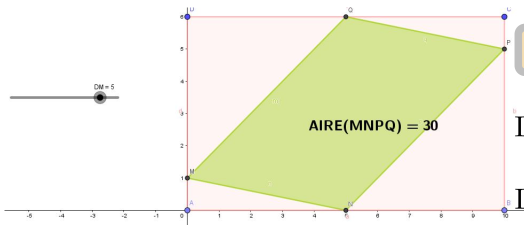
1. Conjecture pour une aire maximale :



   Il semblerait que l'aire soit maximale pour une valeur de DM égale à 4. L'aire vaut alors 32 cm^2.

2. Conjecture pour une aire égale à 30 cm^2 :





   Il semblerait que l'aire soit égale à 30 cm^2 pour deux valeurs différentes de DM ; ces valeurs étant $DM = 3$ et $DM = 5$.

3. *Démonstration des conjectures* : on note $x = DM$ et l'on exprime l'aire du parallélogramme $MNPQ$ en fonction de x. « Visuellement », il est raisonnable d'écrire

$$aire(MNPQ) = aire(ABCD) - 2 \times aire(DMQ) - 2 \times aire(AMN) \quad (1)$$

   puis, $aire(ABCD) = AD \times AB = 6 \times 10 = 60$, $aire(DMQ) = \dfrac{DM \times DQ}{2} = \dfrac{x^2}{2}$
   et $aire(AMN) = \dfrac{AM \times AN}{2} = \dfrac{(6-x)(10-x)}{2}$.
   En reportant dans la relation (1) : $aire(MNPQ) = \ldots = -2x^2 + 16x$.

On reconnaît une expression du second degré ($a = -2$, $b = 16$ et $c = 0$) avec $a = -2 < 0$ donc l'expression présente un maximum en $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{16}{2 \times (-2)} = 4$.
Pour évaluer ce maximum, il suffit de remplacer x par 4 dans l'expression de l'aire du parallélogramme $MNPQ$: $-2(4)^2 + 16 \times 4 = \ldots = 32$.

Pour la deuxième : On veut que l'aire soit égale à 30, ce qui s'écrit

$$-2x^2 + 16x = 30 \Leftrightarrow -2x^2 + 16x - 30 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$$

On reconnaît une équation du second degré ; on applique la méthode de résolution utilisant le discriminant Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = \ldots = 4$
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \ldots = 5$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \ldots = 3$
3 et 5 sont des valeurs comprises entre 0 et 6 donc $DM = 3$ (M milieu de $[AD]$) et $DM = 5$ donnent une aire égale à 30 cm^2.

• ○ •

Exercice 2▷ 82(2) page 72

Il s'agissait de résoudre dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{3-x}{2-x} \leqslant \dfrac{x+2}{2x-1} \Leftrightarrow \dfrac{3-x}{2-x} - \dfrac{x+2}{2x-1} \leqslant 0 \quad (2)$

Les valeurs 2 et 0,5 sont « interdites » (division par 0) donc,
pour tout x différent de 2 et 0,5,

$$(2) \Leftrightarrow \frac{3-x}{2-x} \times \frac{2x-1}{2x-1} - \frac{x+2}{2x-1} \times \frac{2-x}{2-x} \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(3-x)(2x-1)-(x+2)(2-x)}{(2-x)(2x-1)} \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{6x-3-2x^2+x-2x+x^2-4+2x}{(2-x)(2x-1)} \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+7x-7}{(2-x)(2x-1)} \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{2}; \frac{7-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left]2; \frac{7+\sqrt{21}}{2}\right] \ (*)$$

$(*)$ faire un tabeau de signes

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{7-\sqrt{21}}{2}$		2		$\frac{7+\sqrt{21}}{2}$		$+\infty$
$-x^2+7x-7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$-2x^2+5x-2$ $=(2-x)(2x-1)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $\dfrac{-x^2+7x-7}{(2-x)(2x-1)}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	