Exercice 61 p 144 : les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$f(x) = (x-3)(2x+1) - (x-3)^2 \text{ et } g(x) = (x-1)^2 - 4$$

1. Développer et factoriser :

   $f(x) = (x-3)(2x+1) - (x-3)^2 = 2x^2 - 5x - 3 - (x^2 - 6x + 9) = x^2 + x - 12$

   $g(x) = (x-1)^2 - 4 = x^2 - 2x + 1 - 4 = x^2 - 2x - 3$

   $f(x) = (x-3)[(2x+1) - (x-3)] = (x-3)(x+4)$

   $g(x) = (x-1-2)(x-1+2) = (x-3)(x+1)$

2. Choix de formes les mieux adaptées

Image de	3	$\sqrt{2}$	$3+\sqrt{3}$	Calcul effectif
Forme énoncé de $f(x)$				
Forme développée de $f(x)$		*		$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} - 12 = -10 + \sqrt{2}$
Forme factorisée de $f(x)$	*		*	$f(3) = (3-3)(3+4) = 0$ $f(3+\sqrt{3}) = (3+\sqrt{3}-3)(7+\sqrt{3}) = 7\sqrt{3}+3$

Image de	3	$\sqrt{2}$	$3+\sqrt{3}$	Calcul effectif
Forme énoncé de $g(x)$				
Forme développée de $g(x)$		*		$g(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} - 3 = -1 - 2\sqrt{2}$
Forme factorisée de $g(x)$	*		*	$g(3) = (3-3)(3+1) = 0$ $g(3+\sqrt{3}) = (3+\sqrt{3}-3)(4+\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}+3$

b. Pour les antécédents de 0, la forme la mieux adaptée est la forme factorisée :
$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -4$. Les antécédents de 0 par f sont 3 et -4.
$g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -1$. Les antécédents de 0 par g sont 3 et -1.

c. $f(x) = 3g(x) \Leftrightarrow f(x) - 3g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+4) - 3(x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(-2x+1) = 0$
$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = \frac{1}{2}$. Ainsi $S = \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$

$g(x) - f(x) = 7 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 - (x^2 + x - 12) = 7 \Leftrightarrow -3x = 7 - 9 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$. $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

d. $f(x) + 12 \leqslant g(x) + 3 \Leftrightarrow x^2 + x \leqslant x^2 - 2x \Leftrightarrow 3x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$. On a donc $S =]-\infty; 0]$

Pour $x \neq 3$ et $x \neq -1$, $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(x+1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x+1} > 0$

On peut réaliser un tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\frac{x+4}{x+1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$S =]\infty; -4[\cup]-1; +\infty[$