Soit d la droite d'équation $(1-k)x+(4k^2-9)y-8=0$, où k est un nombre réel.

Déterminer le(s) réel(s) k dans chacun des cas suivants.

1. d est une droite parallèle aux axes.
2. Le point $A(1;2)$ apaprtient à la droite d.
3. $B\left(-1-k;\dfrac{1}{9}k^2\right)$ appartient à la droite d.
4. La droite d est parallèle à la droite Δ d'équation $x+2ky-6k=0$.

• ◯ • ◯ •

Dans $(O;\vec{i};\vec{j})$,
d admet le vecteur $\vec{u_d}\begin{pmatrix}-b=9-4k^2\\ a=1-k\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur. $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

1. • d est parallèle à $(O;\vec{i})$ (axe des abscisses) si $\vec{u_d}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires. Or la colinéarité se traduit par :
$$(9-4k^2)\times 0-(1-k)\times 1=0 \Leftrightarrow k-1=0 \Leftrightarrow \boxed{k=1}$$
Ainsi, pour $k=1$, la droite d est parallèle à l'axe des abscisses.

   • d est parallèle à $(O;\vec{j})$ (axe des ordonnées) si $\vec{u_d}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires. Cela s'écrit :
$$(9-4k^2)\times 1-(1-k)\times 0=0 \Leftrightarrow 9-4k^2=0 \Leftrightarrow k^2=\frac{9}{4} \Leftrightarrow \boxed{k=\frac{3}{2}} \text{ ou } \boxed{k=-\frac{3}{2}}$$
Ainsi, pour $k=-\dfrac{3}{2}$ ou $k=\dfrac{3}{2}$, la droite d est parallèle à l'axe des ordonnées.

• ◯ • ◯ •

2. Les coordonnées de A vérifient l'équation de d si, et seulement si, le point A est sur d.

   k est tel que $A\in d \Leftrightarrow (1-k)x_A+(4k^2-9)y_A-8=0 \Leftrightarrow 1-k+8k^2-18-8=0 \Leftrightarrow 8k^2-k-25=0$.

   $\Delta=801=3\sqrt{89}$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes $\boxed{k_1=\dfrac{1+3\sqrt{89}}{16}}$ et $\boxed{k_2=\dfrac{1-3\sqrt{89}}{16}}$.

   $A\in d$ si et seulement si $k=k_1$ ou $k=k_2$.

• ◯ • ◯ •

3. $B\left(-1-k;\dfrac{1}{9}k^2\right)$ appartient à la droite d implique que
$$(1-k)(-1-k)+(4k^2-9)\times\frac{1}{9}-8=0 \Leftrightarrow k^4=\frac{81}{4} \Leftrightarrow \boxed{k=\frac{3}{\sqrt{2}}} \text{ ou } \boxed{k=-\frac{3}{\sqrt{2}}}$$
$B\in d$ si et seulement si $k=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ ou $k=-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

• ◯ • ◯ •

4. $\vec{u_\Delta}\begin{pmatrix}-2k\\1\end{pmatrix}$. Si $\vec{u_d}$ et $\vec{u_\Delta}$ sont colinéaires alors d et Δ sont parallèles.
On calcule k pour les deux vecteurs soient colinéaires
$$(1-k)\times 2k-1\times(4k^2-9)=0 \Leftrightarrow -6k^2+2k+9=0$$
$\Delta=220=2\sqrt{55}$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes $\boxed{k_1=\dfrac{1-\sqrt{55}}{6}}$ et $\boxed{k_2=\dfrac{1+\sqrt{55}}{6}}$.
Si $k=k_1$ ou $k=k_2$ alors d et Δ sont parallèles.