EXERCICE 1 :

1. On a $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^4(x)\cos(x) = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 \times \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) = \dfrac{1}{32}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4 \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$.

   Compte-tenu du développement de $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, on obtient :

   pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\sin^4(x)\cos(x) = \frac{1}{32}(e^{5ix} + e^{-5ix}) - \frac{3}{32}(e^{3ix} + e^{-3ix}) + \frac{1}{16}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{16}\cos(5x) - \frac{3}{16}\cos(3x) + \frac{1}{8}\cos(x)$$

2. Linéariser permet, par exemple, de déterminer des primitives ; ainsi :
   $$\int_0^{\pi/2} \sin^4(x)\cos(x)\,dx = \left[\frac{1}{80}\sin(5x) - \frac{1}{16}\sin(3x) + \frac{1}{8}\sin(x)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{80} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{1}{5}$$

Remarque 1 Il ne vous aura pas échappé qu'une linéarisation n'était pas nécessaire pour calculer l'intégrale. En effet,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4(x)\cos(x)\,dx = \left[\frac{\sin^5(x)}{5}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{5}.$$

EXERCICE 2 :

Pour tout $x \in I =]0;+\infty[$, $x^{1/x} = e^{\ln(x)/x}$. f est dérivable sur I en tant que composée et quotient de fonctions dérivables ($x \mapsto e^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$).

$\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2} e^{\ln(x)/x}$.

Le signe de $f'(x)$ dépend donc de celui de $1 - \ln(x)$. Or $1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e$ et $1 - \ln(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$. On obtient donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e$ et $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e$ puis $f'(e) = 0$. C'est ainsi que f' s'annule en changeant de signe d'où la présence d'un extremum sur $]0;+\infty[$ qui s'avère être un maximum (f croissante puis décroissante).

Le maximum vaut $f(e) = e^{1/e}$. Or $2 < e < 3$ donc le maximum de $n^{1/n}$ pour n entier naturel non nul est soit $f(2)$, soit $f(3)$.
$f(2) = 2^{1/2} = \sqrt{2}$ et $f(3) = 3^{1/3} = \sqrt[3]{3}$. Or $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ donc le maximum de $n^{1/n}$ est obtenu pour $n = 3$.

EXERCICE 3 :

1. $\arccos(1/2) = a \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [0;\pi] \\ \cos(a) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = \dfrac{\pi}{3}$; $\arccos(-1) = a \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [0;\pi] \\ \cos(a) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a = \pi$

   $\arccos(-\sqrt{3}/2) = a \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [0;\pi] \\ \cos(a) = -\sqrt{3}/2 \end{cases} \Leftrightarrow a = \dfrac{5\pi}{6}$; $\arccos(0) = a \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [0;\pi] \\ \cos(a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \pi/2$

2. $\arcsin(1/2) = a \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [-\pi/2;\pi/2] \\ \cos(a) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = \dfrac{\pi}{6}$; $\sin(3\pi/2) = -1$ et $\arcsin(-1) = a \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [-\pi/2;\pi/2] \\ \sin(a) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $a = -\pi/2$ donc $\arcsin(\sin(3\pi/2)) = -\pi/2$

   $\sin(-9\pi/4) = \sin(-\pi/4)$ et $\arcsin(\sin(-\pi/4)) = -\pi/4$ en effet $-\pi/4 \in [-\pi/2;\pi/2]$

   $\cos^2(\arcsin(1/\sqrt{5})) = 1 - \sin^2(\arcsin(1/\sqrt{5})) = 1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \dfrac{4}{5}$

   On a donc $\cos(\arcsin(1/\sqrt{5})) = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, or $\arcsin(1/\sqrt{5}) \in [-\pi/2;\pi/2]$ donc son cosinus est positif et

   $\cos(\arcsin(1/\sqrt{5})) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

$\tan(\arctan(3)) = 3$ et $\tan^2(\arcsin(1/10)) = \dfrac{1}{\cos^2(\arcsin(1/10)} - 1 = \dfrac{1}{1-\sin^2(\arcsin(1/10))} - 1.$

On obtient donc : $\tan(\arcsin(1/10)) = \pm\dfrac{1}{3}$, comme $\arcsin(1/10) \in [0;\pi/2]$, $\tan(\arcsin(1/10)) \geqslant 0$ et vaut $\dfrac{1}{3}$.

3. Pour $x \in [-1;1],\ \cos(\arccos(x)) = x$.
Pour $x \in [-1;1],\ \sin^2(\arccos(x)) = 1-\cos^2(\arccos(x)) = 1-x^2$ donc $\sin(\arccos(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}$;
Or $\arccos(x) \in [0;\pi]$ donc $\sin(\arccos(x)) \geqslant 0$ et vaut $\sqrt{1-x^2}$
Pour $x \in [-1;0[\cup]0;1],\ \tan^2(\arccos(x)) = \dfrac{1}{\cos^2(\arccos(x))} - 1 = \dfrac{1}{x^2} - 1 = \dfrac{1-x^2}{x^2}$. ($x=0$ ne permet pas de définir $\tan(\arccos(x))$)
   - Pour $x \in [-1;0[,\ \tan(\arccos(x)) = -\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}$;
   - Pour $x \in]0;1],\ \tan(\arccos(x)) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

   On a donc, pour $x \in [-1;0[\cup]0;1],\ \tan(\arccos(x)) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

4. Pour tout x réel, $\sin^2(\arctan(x)) = 1-\cos^2(\arctan(x)) = 1 - \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ donc $\sin(\arctan(x)) = \pm\dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$.
   - Pour $x<0$, $\arctan(x) \in]-\pi/2;0[$ donc $\sin(\arctan(x)) < 0$ et vaut $-\dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;
   - Pour $x>0$, $\arctan(x) \in]0;\pi/2[$ donc $\sin(\arctan(x)) > 0$ et vaut $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;
5. Laissé à la sagacité du lecteur.
6. Pour $x \in]-1;1[$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ donc f est constante sur $]-1;1[$. Or $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$, puis $f(-1) = -\dfrac{\pi}{2} + \pi = \dfrac{\pi}{2}$ et enfin $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$. on peut donc écrire que : $\forall x \in [-1;1],\ \arcsin(x)+\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
7. Pour $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-1/x^2}{1+(1/x)^2} = 0$ donc f est constante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$:
   - Pour $x>0$, $\arctan(x)>0$ et $\arctan(1/x)>0$ donc $f(x)=\lambda$ avec $\lambda>0$, $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\lambda = \dfrac{\pi}{2}$;
   $$x>0 \Rightarrow \arctan(x)+\arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$$
   - Pour $x<0$, $\arctan(x)<0$ et $\arctan(1/x)<0$ donc $f(x)=\beta$ avec $\beta<0$, $f(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$ donc $\beta = -\dfrac{\pi}{2}$;
   $$x<0 \Rightarrow \arctan(x)+\arctan(1/x) = -\frac{\pi}{2}$$
8. $\arctan(x)+\arctan(1/3) = \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \arctan(x) = \dfrac{\pi}{4} - \arctan(1/3)$.

   la fonction arctan est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-\pi/2;\pi/2[$. La question qui se pose est donc : $\dfrac{\pi}{4} - \arctan(1/3)$ appartient-il à $]-\pi/2;\pi/2[$ auquel cas l'équation aura une solution unique que l'on pourra chercher.

   $0 < 1/3 < 1 \Rightarrow \arctan(0) < \arctan(1/3) < \arctan(1) \Leftrightarrow 0 < \arctan(1/3) < \pi/4 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4} - \arctan(1/3) \in [0;\pi/4]$

   D'après ce qui précède, il existe $a \in \mathbb{R}$, unique tel que $\arctan(a) = \dfrac{\pi}{4} - \arctan(1/3)$.
   D'ailleurs $a = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \arctan(1/3)\right) = \dfrac{\tan(\pi/4)-\tan(\arctan(1/3))}{1+\tan(\pi/4)\tan(\arctan(1/3))} = \dfrac{1-1/3}{1+1/3} = \dfrac{2/3}{4/3} = \dfrac{1}{2}$.
   En effet , $\tan(a-b) = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \dfrac{\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)}$.

   En divisant, numérateur et dénominateur par $\cos(a)\cos(b)$, on obtient :
   $$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b))}{1+\tan(a)\tan(b))}$$

EXERCICE 4 :

$$f(x) = \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}.$$

1. Ensemble de définition de f : $f(x)$ existe si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} 1-x \in [-1;1] \\ x>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in]0;2]$
2. On aboutit à une forme indéterminée donc on pose $ut = \arccos(1-x)$ et $u \in [0;\pi]$.
   On a ainsi $\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}} = \dfrac{u}{\sqrt{1-\cos(u)}}$; la recherche de la limite précédente est ramenée au calcul de $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \dfrac{u}{\sqrt{1-\cos(u)}}$ et :
   $$\frac{u}{\sqrt{1-\cos(u)}} = \frac{u\sqrt{1+\cos(u)}}{\sqrt{1-\cos^2(u)}} = \frac{u}{\sin(u)}\sqrt{1+\cos(u)}$$
   (en effet , $u \in [0;\pi]$ implique $\sqrt{\sin^2(u)} = \sin(u)$)
   Or $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \dfrac{u}{\sin(u)} = 1$ (limite connue) donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}$

EXERCICE 5 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$

1. Comme la fonction arctan est croissante sur $\mathbb{R}$ et $0 \leqslant \arctan(X) < \dfrac{\pi}{2}$,
   $$0 < \arctan(x+1) - \arctan(x) \leqslant \arctan(x+1) < \frac{\pi}{2}$$
   Pour tout réel $x \geqslant 0$,
   $\tan(\arctan(x+1) - \arctan(x)) = \dfrac{\tan(\arctan(x+1) - \tan(\arctan(x))}{1+\tan(\arctan(x+1)\tan(\arctan(x))} = \dfrac{x+1-x}{1+(x+1)x} = \dfrac{1}{x^2+x+1}.$
   Or $\left\{\begin{array}{l} \tan(X) = Y \\ X \in]0;\pi/2[\end{array}\right. \Leftrightarrow X = \arctan(Y)$
   Ainsi, pour tout réel $x \geqslant 0$, $\arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1) - \arctan(x)$.
2. $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(\arctan(k+1) - \arctan(k)) = (\arctan(1) - \arctan(0)) + \ldots + (\arctan(n+1) - \arctan(n))$
   $\Leftrightarrow S_n = \arctan(n+1) - \arctan(0) = \arctan(n+1)$
3. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$ donc la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$ est $\dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 6 :

$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos(\alpha) + \cos(\beta) = -1 \\ \sin(\alpha) + \sin(\beta) = 0 \end{array}\right.$

$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta + 2k\pi$ ou $\alpha = \pi + \beta + 2k\pi$.

- $\alpha = \pi + \beta + 2k\pi \Rightarrow 0 = -1$ donc relation entre α et β ne convient pas ;
- $\alpha = -\beta + 2k\pi \Rightarrow \cos(\beta) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \beta = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$. On obtient $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = j$ ou j^2.