I Partie A

f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - xe^x$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signede $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	1	$\nearrow$	$1+\frac{1}{e}$	$\searrow$	$-\infty$

1. Dérivée : valeur qui annule la dérivée, signe de la dérivée, variations de f, extremum et les deux limites.
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -(e^x + xe^x) = -e^x(x+1)$.
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0$ car e^x ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
     donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
   - Comme $-e^x < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe contraire de $x+1$: $f'(x) < 0$ pour $x > -1$ et f est strictement décroissante sur $[-1; +\infty[$ puis $f'(x) > 0$ pour $x < -1$ ce qui implique que f est strictement croissante sur $]-\infty; -1]$.
2. Équation $f(x) = 0$: f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $f(-1) > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet une solution α dans $[-1; +\infty[$. Comme f est strictement décroissante sur $[-1; +\infty[$, le théorème de la bijection assure l'unicité de cette solution dans $[-1; +\infty[$.
3. Par balayage à la calculatrice, on obtient : $0.5 < \alpha < 0.6$ (amplitude 10^{-1})
4. Signe de $f(x)$ selon les valeurs de x :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

II Partie B

$g(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$

1. g est croissante sur $]-\infty; \alpha]$: $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \dfrac{1+e^x - e^x(1+x)}{(1+e^x)^2} = \dfrac{1-xe^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{f(x)}{(1+e^x)^2}$:
   - $f(x) > 0$ sur $]-\infty; \alpha[$;
   - $(1+e^x)^2 > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $g'(x) > 0$ sur$]-\infty; \alpha[$ et la fonction g est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$.
2. $g(\alpha) = \dfrac{1+\alpha}{1+e^\alpha} = \dfrac{1+\alpha}{1+\dfrac{1}{\alpha}} = \alpha$

   En effet, comme $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha e^\alpha = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$
3. On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = -0,8 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

   Démontrons, par récurrence, que la suite (u_n) est majorée par α et que la suite (u_n) est croissante.

   On pose $P_n : u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

   - Initialisation à $n = 0$: $u_0 = -0,8$ et $u_1 \approx 0.15$ donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$ et P_0 est vraie.
   - Hérédité : On suppose que P_n est vraie pour **un** $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit de prouver que P_{n+1} est vraie.

     P_n vraie donc $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

     Mais comme g est croissante sur $]-\infty; \alpha]$, on obtient : $g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(\alpha)$

     $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$ car $g(\alpha) = \alpha$.

     La relation obtenue prouve que P_{n+1} est vraie.
   - Conclusion : D'après le principe du raisonnement par récurrence, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha\ \forall n \in \mathbb{N}$. (u_n) est donc croissante et majorée par α.
4. (u_n) est croissante et majorée donc elle est convergente et sa limite l vérifie la relation $g(l) = l$. Comme α est l'unique valeur vérifiant $g(\alpha) = \alpha$, $l = \alpha$.