NOM : ……………………….. NOTE :

DS – Suites et fonctions

EXERCICE 1			**/6**
1	$u_0=0^2-1=-1$, $u_1=0$ et $u_2=3$ puis 8 , 15 , 24 , 35 , 48 , 63 , 80 $v_1=v_0+2\times 0+1=-1+0+1=0$, $v_2=3$, puis 8 , 15 , 24 , 35 , 48 , 63 , 80 Conjecture : pour tout entier naturel n , $u_n=v_n$		**1** **1** **1**
2	$u_{n+1}=(n+1)^2-1=n^2+2n=u_n+2n+1$		**2**
3	Les suites *u* et *v* vérifient la même relation de récurrence et $u_0=v_0$. pour tout entier naturel n , $u_n=v_n$		**1**
EXERCICE 2			**/10**
1	$u_0=0\,;u_1=0\,;u_2=2\,;u_3=6\,;u_4=12$ $u_{n+1}-u_n=2n$ Pour tout entier naturel n , $2n\geqslant 0$ *et* $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$: la suite *u* est croissante.		**1** **1** **1**
2	$u_0=1\,;u_1=2{,}25\,;u_2=7{,}5625\,;u_3\approx 65\,;u_4\approx 4290{,}76$ $u_{n+1}-u_n=u_n^2+\frac{1}{4}$ Pour tout entier naturel n , $u_n^2\geqslant 0$ *et* $u_n^2+\frac{1}{4}\geqslant\frac{1}{4}$ soit $u_{n+1}-u_n>0$: la suite *u* est strictement croissante.		**1** **1** **1**
3	$u_0=-1\,;u_1=-1\,;u_2=-2\,;u_3=-5\,;u_4=-12$ $u_{n+1}-u_n=n+1-2^{n+1}-(n-2^n)=1-2^{n+1}+2^n=1-2^n$ Pour tout entier naturel n , $2^n\geq 1$ *et* $1-2^n\leqslant 0$ soit $u_{n+1}-u_n\leq 0$ La suite *u* est décroissante.		**1** **1,5** **1,5**
EXERCICE 3			**/12**
1	VRAI : La fonction carré associée à la suite *u* est strictement croissante sur [0;+∞[donc la suite *u* est strictement croissante.		**1+1**
2	VRAI : Si la suite *u* est croissante alors pour tout entier naturel *n*, on a $u_n\leqslant u_{n+1}$ d'où $-u_n\geqslant -u_{n+1}$ soit $v_n\geqslant v_{n+1}$. cela signifie donc que la suite *v* est décroissante		**1+1**
3	FAUX : on peut avoir $u_4=3{,}5$, ….		**1+1**
4	VRAI : Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $n<2n$ et si *u* est strictement décroissante alors $u_n>u_{2n}$		**1+1**
5	FAUX : Considérons la suite *u* définie par $u_n=-0{,}5^n$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n}=0{,}5\leqslant 1$ mais la suite *u* est croissante.		**1+1**
6	FAUX : Considérons $u_n=(-1)^n$		**1+1**

EXERCICE 4			/7
1	$f(x)=x^2-6x+1$		1
2	*f* est une fonction polynôme de degré 2 avec *a* = 1 , *b*=-6 et c=1 Comme *a* >0 , on a :		2

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f(x)		↘	-8	↗	

$\frac{-b}{2a}=\frac{6}{2\times 1}=3$

f est strictement croissante sur $[3;+\infty[$

3	La suite *w* associée à la fonction *f* est donc strictement croissante à partir du rang 3		1
4	$w_n \geqslant 316 \Leftrightarrow n^2-6n-315 \geqslant 0$ $\Delta=1296$, $n_1=-15$ et $n_2=21$		2

n	0		21		$+\infty$
n^2–6n–315		–	0	+	

Ainsi , $w_n \geqslant 316$ pour $n \geqslant 21$

5	$\lim_{n\to+\infty} w_n=+\infty$		1

EXERCICE 5			/6
1.	*u* et $-2u$ ont des variations contraires car -2<0 -2*u* et -2*u*+1 ont les mêmes variations		2

x	0		1		$+\infty$
f	1	↗	3	↘	?

2	*u* et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations lorsque $u \geqslant 0$ soit sur [2;+∞[$\frac{-1}{2}<0$ donc $\frac{-1}{2}\sqrt{u}$ et $\sqrt{u}$ ont des variations contraires et $\frac{-1}{2}\sqrt{u}$ et $\frac{-1}{2}\sqrt{u}+3$ ont les mêmes variations		2

x	2		$+\infty$
g	0	↗	?

x	2		$+\infty$
f '(x)		–	
f(x)	3	↘	?

3	*u* et $\frac{1}{u}$ ont des variations contraires		2

x	0		1		2		$+\infty$
h	‖ ?	↗	-1	↘	? ‖ ?	↘	?

EXERCICE 6			**/10**
1.a	$f(0{,}5)=2$; $f'(0{,}5)=-3$		**2**
1.b	$y=-3x+\frac{7}{2}$		**2**
2.a	$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=3-2h$		**2**
2.b	$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}3-2h=3$: f est dérivable en -1 et $f'(-1)=3$		**1**
2.c	T_2 passe par A(-1;2) car $f(-1)=2$ et a pour coefficient directeur $f'(-1)=3$. Son équation est $y=3x+5$		**2**
2.d	Construction de T_2		**1**
EXERCICE 7			**/9**
1	D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B , on a : $AC^2=AB^2+BC^2$ soit $AC^2=4^2+3^2=25$ et AC=5		**2**
2	M $\in$[AC] avec AC=5 donc $x\in[0;5]$		**1**
3.a	$u(x)=x^2-5x+25$		**1**
3.b	$\begin{array}{\|c\|ccccc\|}\hline x & 0 & & 2{,}5 & & 5 \\ \hline u & 25 & \searrow & & \nearrow & 25 \\ & & & 18{,}75 & & \\ \hline\end{array}$		**1**
3.c	$u>0$ *Sur (0;5]* , u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations . $\begin{array}{\|c\|ccccc\|}\hline x & 0 & & 2{,}5 & & 5 \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & 5 & \searrow & & \nearrow & 5 \\ & & & \sqrt{18{,}75} & & \\ \hline\end{array}$		**2**
4.a	$H(2{,}5)=\sqrt{18{,}75}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ est la hauteur de la pyramide issue de E.		**1**
4.b	$V=\frac{4\times 3\times\frac{5\sqrt{3}}{2}}{3}=10\sqrt{3}$		**1**