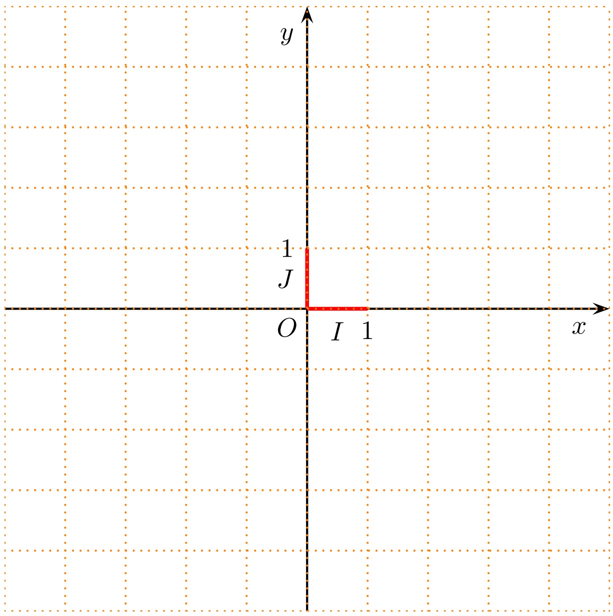
I Fonction inverse

On appelle fonction inverse, la fonction suivante : $\boxed{f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}}$

Est-il possible de compléter les pointillés : $\dfrac{1}{0} = ...$ et $\dfrac{1}{......} = 0$?

I.1 Observations

1. D'après de ce qui précède :
   - Quel est l'ensemble de définition de la fonction inverse ?
   - Le nombre 0 a-t-il un antécédent par la fonction inverse ?
2. Remplir le tableau de valeurs et construire les points obtenus :



x	$f(x)$	x	$f(x)$
-5		0.2	
-4		$\frac{1}{4}$	
-3		$\frac{1}{2}$	
-2		1	
-1		2	
$-\frac{1}{2}$		3	
$-\frac{1}{4}$		4	
-0.2		5	
0			

3. Quelles sont les conséquences graphiques des réponses à la question 1 ?
4. Observez les éléments de symétrie de la courbe et justifiez-les.
5. Décrire les variations de la fonction inverse et construire son tableau de variation.

I.2 Démonstrations

1. En considérant des nombres u et v strictement positifs tels que $u < v$ $(0 < u < v)$, prouver que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

   Aide : Déterminer le signe de $\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v}$

   Exemple 1 Comparer, si possible, les inverses des nombres suivants, justifier (s'aider de la courbe de la fonction inverse et de ses variations) :
   - 3 et 12 puis -3 et -5.
   - 3 et x avec $x > 3$ puis -3 et x avec $x < -3$
   - -4 et 3 puis -2 et 10
   - -3 et x avec $x > -3$ puis 4 et x avec $x < 4$

2. Prouver que la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$
3. Énoncer les propriétés sur les rangements des inverses, comme pour la fonction carrée, en utilisant les variations de la fonction inverse.

II Fonction homographique

> On appelle fonction homographique, la fonction suivante : $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec c non nul.

II.1 Observations sur un exemple

Soit la fonction g définie par : $g : x \longmapsto \dfrac{-6x+1}{-3x-9}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction. Quelle en est la conséquence graphique ?
2. Quels sont les éventuels antécédents de 2 par la fonction g ? Quelle est la conséquence pour sa représentation graphique.
3. Représenter la courbe représentative de la fonction g sur la calculatrice, reproduire son allure et donner son tableau de variations.
4. Démonstrations :
   (a) Montrer que, pour $x \neq -3$, $g(x) = 2 + \dfrac{19}{-3x-9}$
   (b) Compléter les enchaînements du raisonnement ci-dessous :

$$\begin{array}{lccccc}
 & -3 & < & u & < & v \\
\text{donc} & ..... & ... & -3u & ... & -3v \\
\text{donc} & ..... & ... & -3u-9 & ... & -3v-9 \\
\text{donc} & ..... & ... & \dfrac{1}{-3u-9} & ... & \dfrac{1}{-3v-9} \\
\text{donc} & ..... & ... & \dfrac{19}{-3u-9} & ... & \dfrac{19}{-3v-9} \\
\text{donc} & ..... & ... & 2+\dfrac{19}{-3u-9} & ... & 2+\dfrac{19}{-3v-9} \\
\text{donc} & ..... & ... & g(....) & ... & g(....)
\end{array}$$

   Quelle est la conclusion de ce raisonnement ?

II.2 Cas général

$h : x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec c non nul.

1. Quel est l'ensemble de définition de h ?
2. Quel nombre n'a pas d'antécédent ?
3. Quelles sont les conséquences graphiques des deux questions précédentes ?