I Fonction carré

EXERCICE 1 En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction carrée ou de son tableau de variation, compléter par ce qu'il est possible de déduire pour x^2 :

1. Si $x > 3$ alors
2. Si $x < -\sqrt{2}$ alors ....
3. Si $x > 2$ alors ....
4. Si $x < -3$ alors ....
5. Si $x < 4$ alors ....
6. Si $x > -10$ alors ....
7. Si $x < 1$ alors ....
8. Si $x > -5$ alors ....

• ◯ •

EXERCICE 2

1. On pose : $-7 \leqslant x \leqslant 5\sqrt{2}$.
   Compléter :
   (a) Si $-7 \leqslant x \leqslant 0$ alors .... x^2 ....
   (b) Si $0 \leqslant x \leqslant 5\sqrt{2}$ alors .... x^2 ....
   (c) Donc si $-7 \leqslant x \leqslant 5\sqrt{2}$ alors .... $\leqslant x^2 \leqslant$ ....
2. Compléter de la même manière :
   (a) Si $-3 \leqslant x \leqslant 1$ alors .... $\leqslant x^2 \leqslant$ ....
   (b) Si $-2 \leqslant x \leqslant 3$ alors .... $\leqslant x^2 \leqslant$ ....
   (c) Si $-3 \leqslant x \leqslant 3$ alors .... $\leqslant x^2 \leqslant$ ....

• ◯ •

EXERCICE 3 Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $x^2 = 4$;
2. $x^2 = 5$;
3. $x^2 = 0$;
4. $x^2 = -2$;
5. $x^2 < 4$;
6. $x^2 \geqslant 9$;
7. $x^2 > -2$;
8. $x^2 \leqslant -3$;
9. $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$;
10. $-1 \leqslant x^2 \leqslant 9$;
11. $0 \leqslant x^2 \leqslant 8$;
12. $4 > x^2 > 1$.

• ◯ •

EXERCICE 4 L'énoncé « si $x \geqslant 2$, alors $x^2 \geqslant 4$ » est appelé **une implication**. On dit aussi « $x \geqslant 2$ implique $x^2 \geqslant 4$ » ou bien « $x \geqslant 2$ donc $x^2 \geqslant 4$ ». On note « $x \geqslant 2 \Rightarrow x^2 \geqslant 4$ ».

1. L'implication proposée est-elle vraie ? Justifier.
2. Parmi les implications suivantes, indiquer celles qui sont vraies et celles qui sont fausses.
   (a) $x < -1 \Rightarrow x^2 > 1$
   (b) $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$
   (c) $x < 0 \Rightarrow x^2 < 0$
   (d) $x < \sqrt{3} \Rightarrow x^2 < 3$
   (e) $x^2 = 2 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$
3. Traduisez par une implication les propositions suivantes :
   (a) Un nombre compris entre 0 et 1 est supérieur à son carré.
   (b) Si le nombre x est tel que $-1 \leqslant x \leqslant 1$, alors $1 - x^2$ est positif.
   (c) Un nombre supérieur à 1 a un carré supérieur à 1.

• ◯ •

EXERCICE 5 Les nombres a et b sont positifs.
L'énoncé « $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$ » signifie que $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ et que $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$. On dit aussi « $a < b$ si et seulement si $a^2 < b^2$.
On note $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

Parmi les équivalences suivantes, indiquer celles qui sont vraies et celles qui sont fausses.

1. Pour tous réels a et b, $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$
2. Pour tous réels négatifs a et b, $a < b \Leftrightarrow a^2 > b^2$
3. Pour tous réels a et b, $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$
4. $x^2 < 1 \Leftrightarrow x < 1$

• ◯ • ◯ •

II Fonction polynôme de degré deux

EXERCICE 6 On donne :

- $f(x) = 5 - (x+1)^2$;
- $g(x) = (x-1)(2+3x)$;
- $h(x) = (x-1)(2x+1) - (x+1)$.

1. Montrer que les 3 fonctions sont des fonctions trinômes.
2. Dresser leurs tableaux de variation.
3. Indiquer les éléments de symétrie de leurs courbes représentatives.

• ○ •

EXERCICE 7 On donne $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

1. Montrer que $f(x) = (x+1)^2 - 2$.
2. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
3. Dresser son tableau de variation en y faisant apparaître les solutions précédentes.
4. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

• ○ •

EXERCICE 8 On donne $f(x) = x^2 + 2x - 15$ pour tout x.

1. Montrer que $f(x) = (x-3)(x+5)$.
2. Montrer que $f(x) = (x+1)^2 - 16$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée :
   (a) Résoudre $f(x) = 0$.
   (b) Résoudre $f(x) \geqslant 9$.

• ○ •

EXERCICE 9 On donne $f(x) = x^2 + 2\sqrt{2}x - 6$ pour tout x.

1. Montrer que $f(x) = (x - 3\sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.
2. Montrer que $f(x) = (x - \sqrt{2})^2 - 8$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée :
   (a) Résoudre $f(x) = 4$.
   (b) Résoudre $f(x) \leqslant 0$.

• ○ •

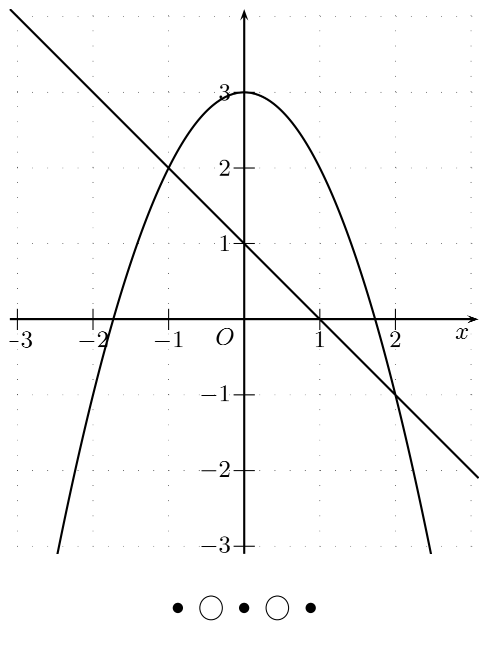
EXERCICE 10 On donne $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ pour tout x.

1. Montrer que $f(x) = (2x-1)(x+2)$.
2. Montrer que $f(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée :
   (a) Résoudre $f(x) = 0$.
   (b) Résoudre $f(x) \leqslant \frac{11}{8}$.

• ○ •

EXERCICE 11 Sur le graphique ci-dessous sont tracées une droite $\mathcal{D}$ et une parabole $\mathcal{P}$. Cette dernière représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - x^2$.

1. (a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   (b) En déduire, graphiquement, le signe de $f(x)$ en fonction de x.
2. (a) Déterminer la fonction affine g représentée par $\mathcal{D}$.
   (b) Résoudre, graphiquement, l'inéquation $f(x) > g(x)$.
3. On désire retrouver par le calcul le résultat précédent.
   (a) Prouver que $f(x) > g(x)$ équivaut à $-x^2 + x + 2 > 0$.
   (b) Vérifier que $(x+1)(2-x) = -x^2 + x + 2$.
   (c) Résoudre alors l'inéquation $f(x) > g(x)$.



• ○ • ○ •

III Fonction homographique (fonction inverse)

EXERCICE 12 En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction inverse ou de son tableau de variation, compléter :

1. Si $x > 3$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
2. Si $x < -\sqrt{2}$ alors ..... $\frac{1}{x}$ .....
3. Si $x > 2$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
4. Si $x < -3$ alors ...... $\frac{1}{x}$ ......
5. Si $x < 4$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
6. Si $x > -10$ alors ..... $\frac{1}{x}$ .....
7. Si $x < 1$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
8. Si $x > -5$ alors ...... $\frac{1}{x}$ ......

• ○ •

EXERCICE 13 On considère les fonctions f et g définies pour tout x non nul par $f(x) = \frac{4}{x}$ et $g(x) = -\frac{2}{x}$.

1. (a) Tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice ? Que peut-on conjecturer concernant les variations de f ?
   (b) Soient $0 < a < b$.
   Que peut-on dire alors de $\frac{1}{a}$ et de $\frac{1}{b}$?
   Que peut-on dire alors de $4 \times \frac{1}{a}$ et de $4 \times \frac{1}{b}$?
   En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.
   (c) Faire de même en partant de $a < b < 0$.
2. Mêmes questions avec la fonction g.

• ○ •

EXERCICE 14 Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes, en justifiant votre réponse :

1. Une fonction homographique est toujours définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Une fonction homographique peut être définie sur $\mathbb{R}$ privé de 1 et 3.
3. La fonction $f(x) = \frac{2-x}{10-x}$ est une fonction homographique.
4. La fonction $g(x) = \frac{2}{2-5x} + \frac{1}{4-10x}$ est une fonction homographique.
5. La fonction $h(x) = \frac{2}{2-5x} + \frac{1}{4-6x}$ est une fonction homographique.
6. La fonction $i(x) = \frac{x^2+1}{x+4}$ est une fonction homographique.

• ○ •

EXERCICE 15 Déterminer les ensembles de définition des fonctions homographiques suivantes et les valeurs de x pour lesquelles elles s'annulent :

- $f : x \longmapsto \frac{3x+1}{2x+4}$
- $g : x \longmapsto \frac{x+5}{x+4}$
- $h : x \longmapsto \frac{2x+3}{3x+4}$
- $i : x \longmapsto \frac{x-1}{3x+1}$

• ○ •

EXERCICE 16 Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\frac{2x+1}{x-4} = 0$
2. $\frac{-x+4}{2x-1} = 0$
3. $\frac{-3x+4}{-2x-1} = 2$
4. $\frac{3x+4}{x+4} = 8$
5. $\frac{x-4}{x-1} = -2$
6. $\frac{2x-5}{x-6} \geqslant 0$
7. $\frac{5x-2}{-3x+1} < 0$
8. $\frac{3x}{4x+9} > 2$
9. $\frac{2x-10}{11x+2} \leqslant -1$

• ○ • ○ •

IV Variations des fonctions homographiques

EXERCICE 17 On s'intéresse à la fonction f telle que

$$f(x) = \frac{x+4}{x+1}$$

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \neq -1$ on a :

$$f(x) = 1 + \frac{3}{x+1}$$

3. Soient a et b tels que $-1 < a < b$.
   (a) Compléter successivement les encadrements successifs :

$$\begin{array}{ccccc}
\dots & < & a & < & b \\
\dots & \dots & a+1 & \dots & b+1 \\
 & & \dfrac{1}{a+1} & \dots & \dfrac{1}{b+1} \\
 & & \dfrac{3}{a+1} & \dots & \dfrac{3}{b+1} \\
 & & 1+\dfrac{3}{a+1} & \dots & \dfrac{3}{b+1} \\
 & & f(a) & \dots & f(b)
\end{array}$$

   (b) En déduire le sens de variation de f sur $]-1\,;+\infty[$.
4. Déterminer de la même manière le sens de variation de f sur $]-\infty\,;-1[$.

• ○ •

EXERCICE 18 On s'intéresse à la fonction f telle que

$$f(x) = \frac{2x-5}{3-x}$$

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \neq 3$ on a :

$$f(x) = \frac{1}{3-x} - 2$$

3. Soient a et b tels que $3 < a < b$.
   (a) Compléter successivement les encadrements successifs :

$$\begin{array}{ccccc}
\dots & < & a & < & b \\
\dots & \dots & -a & \dots & -b \\
\dots & \dots & 3-a & \dots & 3-b \\
 & & \dfrac{1}{3-a} & \dots & \dfrac{1}{3-b} \\
 & & \dfrac{1}{3-a}-2 & \dots & \dfrac{1}{3-b}-2 \\
 & & f(a) & \dots & f(b)
\end{array}$$

   (b) En déduire le sens de variation de f sur $]3\,;+\infty[$.
4. Déterminer de la même manière le sens de variation de f sur $]-\infty\,;3[$.

• ○ •

EXERCICE 19 On s'intéresse à la fonction f telle que

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \neq -2$ on a :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x+2}$$

3. En utilisant une des deux expressions de f, résoudre les équations ou inéquations suivantes :
   (a) $f(x) = 0$
   (b) $f(x) = 1$
   (c) $f(x) < 0$
4. Soient a et b tels que $-2 < a < b$.
   (a) Compléter successivement les encadrements successifs :

$$\begin{array}{ccccc}
\dots & < & a & < & b \\
\dots & \dots & a+2 & \dots & b+2 \\
 & & \dfrac{1}{a+2} & \dots & \dfrac{1}{b+2} \\
 & & -\dfrac{1}{a+2} & \dots & -\dfrac{1}{b+2} \\
 & & -1-\dfrac{1}{a+2} & \dots & 1-\dfrac{1}{b+2} \\
 & & f(a) & \dots & f(b)
\end{array}$$

   (b) En déduire le sens de variation de f sur $]-2\,;+\infty[$.
5. Déterminer de la même manière le sens de variation de f sur $]-\infty\,;-2[$.

• ○ •

EXERCICE 20 On s'intéresse à la fonction f telle que

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$$

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \neq -3$ on a :

$$f(x) = 2 - \frac{7}{x+3}$$

3. Déterminer le sens de variation de f sur $]-3\,;+\infty[$.

• ○ • ○ •