• ◯ • *Exercice* 1 • ◯ •

Dans chacun des calculs, donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. Le jeune Bob obtient des résultats moyens à l'école. Pour le motiver, sa maman lui propose le jeu suivant :
À chaque fois qu'il obtient une « bonne » note, il peut tirer successivement sans remise deux pièces dans un sac contenant 7 pièces de 1 euro et 3 pièces de 2 euros. Si les deux pièces sont de valeurs différentes, il garde ces deux pièces et sa maman complète le sac pour une autre fois. Si les deux pièces sont de même valeur, il remet les deux pièces dans le sac.

   On note les événements de la façon suivante :

   - $U_1(U_2)$: « une pièce de 1 euro est choisie au tirage 1 (2) » ;
   - $D_1(D_2)$: « une pièce de 2 euros est choisie au tirage 1 (2) ».

   Exprimer les événements suivants en fonction des événements précédents et déterminer leurs probabilités :

   - A : « Bob tire deux pièces de 1 euro. » ;
   - B : « Bob tire deux pièces de 2 euros. » ;
   - C : « Bob tire deux pièces de valeurs différentes. » .

2. On conserve le principe du jeu. On se propose de faire gagner un peu plus d'argent à Bob en changeant juste le nombre de pièces de 2 euros dans le sac, le nombre de pièces de 1 euro étant toujours de 7.
On suppose qu'il y a n pièces dans le sac dont toujours 7 pièces de 1 euro (n est un entier naturel supérieur ou égal à 10).
   (a) Montrer que la probabilité p_n de l'évènement « Bob tire deux pièces de valeurs différentes » est :
   $$\frac{14(n-7)}{n(n-1)}.$$
   (b) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[10;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{14(x-7)}{x(x-1)}$
   Étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$ et en déduire les deux valeurs entières consécutives de n entre lesquelles la fonction présente son maximum.
   Donner la valeur maximale de p_n.

• ◯ • *Exercice* 2 • ◯ •

Une urne contient 5 boules rouges et $n-5$ boules noires. ($n \geqslant 5$)

A. Tirage avec remise : un joueur tire au hasard, successivement et avec remise, deux boules de l'urne.
   (a) Dresser un arbre pondéré représentant la situation.
   (b) On note A l'événement « les deux boules sont de couleurs différentes ». Calculer $p_n(A)$ (probabilité de A) en fonction de n.
   (c) Déterminer pour quelle valeur de n le joueur a le plus de chances de réaliser A (on étudiera la fonction f définie sur $[5;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{10(x-5)}{x^2}$)

B. Tirage sans remise : un joueur tire au hasard successivement et sans remise, deux boules de l'urne.
   (a) Justifier qu'il y a n^2-n issues possibles.
   (b) Construire l'arbre pondéré représentant la situation.
   (c) Déterminer la probabilité $q_n(A)$.
   (d) Le joueur gagne 2 € s'il réalise A et perd 1 € dans le cas contraire. On note G le gain algébrique du joueur.
      i. Donner la loi de probabilité de G.
      ii. Montrer que $E(G)=\dfrac{-n^2+31n-150}{n^2-n}$
      iii. Déterminer la composition de l'urne pour que le jeu soit équitable.