EXERCICE 1 :

Montrer que pour tout $x \in]0;1[$,

$$x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$$

EXERCICE 2 :

Résoudre l'équation $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

EXERCICE 3 :

1. En utilisant une identité remarquable, simplifier $\sqrt{1+\sin(2x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sqrt{1+\sin(2x)}}\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 4 :

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^n} \quad ,t \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $I_1(t)$.
2. Établir une relation de récurrence entre $I_n(t)$ et $I_{n+1}(t)$.
3. Calculer $I_2(t)$.

EXERCICE 5 :

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\mathrm{e}^t}$.

1. Posons G une primitive de $g : t \longmapsto \dfrac{1}{t\mathrm{e}^t}$. Donner une relation entre f et G.
2. En déduire la dérivée de f.
3. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (on utilisera un théorème de comparaison).
4. Montrer que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ (on utilisera un autre théorème de comparaison).