EXERCICE 1 :

Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ en utilisant des formules trigonométriques. En déduire une expression simple de $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8$.

Réponse : -2^8

EXERCICE 2 :

Résoudre l'équation $(7-6\mathrm{i})z^2-2(7-6\mathrm{i})z-85=0$.

Réponse : $S=\{4+\mathrm{i};-2-\mathrm{i}\}$

EXERCICE 3 :

Résoudre $z^3-(5+3\mathrm{i})z^2+(7+16\mathrm{i})z+3-21\mathrm{i}=0$.
On cherchera à mettre en évidence une solution imaginaire pure.

Réponse : $S=\{3\mathrm{i};3-\mathrm{i};2+\mathrm{i}\}$

EXERCICE 4 :

Réduire la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$, où $n\geqslant 1$.
Réponse : $S_n=\dfrac{1}{2^n\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$

EXERCICE 5 :

Calculer pour $\theta\in]0;2\pi[$ et $n\in\mathbb{N}$,

$$C_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) \text{ et } S_n=\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$$

Réponse : $C_n=\cos\left(\dfrac{n\theta}{2}\right)\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et $S_n=\sin\left(\dfrac{n\theta}{2}\right)\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

EXERCICE 6 :

Déterminer α et β vérifiant $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$

Corrections

EXERCICE 1 Non corrigé

EXERCICE 2 Non corrigé

EXERCICE 3 :

Résoudre (E), $z^3-(5+3\mathrm{i})z^2+(7+16\mathrm{i})z+3-21\mathrm{i}=0$.
On cherchera à mettre en évidence une solution imaginaire pure.

On pose $z=\mathrm{i}x$, où $x\in\mathbb{R}$
et en remplaçant dans l'équation puis en séparant partie réelle et imaginaire, $\begin{cases} 5x^2-16x+3=0 \\ -x^3+3x^2+7x-21=0 \end{cases}$
La première équation donne deux solutions : 3 et $\dfrac{1}{5}$, une seule vérifie l'autre équation, c'est 3. on conclut donc que 3i est solution de l'équation.

Après identification, on trouve que :

$$z^3-(5+3\mathrm{i})z^2+(7+16\mathrm{i})z+3-21\mathrm{i}=(z-3\mathrm{i})(z^2-5z+7+\mathrm{i})$$

$(E)\Leftrightarrow z=3\mathrm{i}$ ou $z^2-5z+7+\mathrm{i}=0$
L'équation du second degré est de discriminant $\Delta=-3-4\mathrm{i}$, avec des racines carrées $1-2\mathrm{i}$ et $-1+2\mathrm{i}$. Ce qui donne comme solutions $2+\mathrm{i}$ et $3-\mathrm{i}$.

Réponse : $S=\{3\mathrm{i};3-\mathrm{i};2+\mathrm{i}\}$

EXERCICE 4 :

$n\geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{3}}\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^k\right)$

On calcule donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^k=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2}\times\frac{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}}{2^n}-1}{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2}-1}$

Or $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2}=\dfrac{1}{4}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2}-1=\mathrm{i}\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{4}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

On remplace et on obtient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^k=\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2^n}\cos\frac{n\pi}{3}-1+\mathrm{i}\frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

Réponse : $S_n=\dfrac{1}{2^n\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$