EXERCICE 1 :

Quel est le coefficient de x^3y^7 dans le développement $(x-2y)^{10}$? Démontrer la formule utilisée.

EXERCICE 2 :

Soit f une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$.
Étudier

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a}$$

EXERCICE 3 :

Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
On définit une fonction $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ f(2x-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

A quelle(s) condition(s) la fonction g est-elle dérivable sur $[0;1]$?

EXERCICE 4 :

Choisir parmi les réponses suivantes : bijective, ni surjective ni injective, injective mais pas surjective, surjective mais pas injective, pour les applications proposées ci-dessous :

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = x^2$.
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, telle que $f(x) = x^2$.
3. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, telle que $f(x) = x$.
4. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = 8x + 50$.
5. $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = 2x$.
6. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \{14\}$, telle que $f(x) = 14$.
7. $f : \{17\} \longrightarrow \{12, 17\}$, telle que $f(x) = 17$.
8. $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
9. $f : \{0\} \longrightarrow \{0\}$, telle que $f(x) = 0$.
10. $f : \{1\} \longrightarrow \{0,5\}$, telle que $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

EXERCICE 5 :

Soient $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(x) = 2x$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

1. f et g sont-elles des injections, des surjections, des bijections ?
2. Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$.

EXERCICE 6 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1;1[$.

2. Déterminer, pour $y \in]-1;1[$, une expression de $f^{-1}(y)$ analogue à celle de $f(x)$.

EXERCICE 7 :

Calculer la somme $0.\binom{n}{0} + 1.\binom{n}{1} + 2.\binom{n}{2} + \ldots + n.\binom{n}{n}$.

EXERCICE 8 :

Calculer la somme $\dfrac{\binom{n}{0}}{1} + \dfrac{\binom{n}{1}}{2} + + \ldots + \dfrac{\binom{n}{n}}{n+1}$.

EXERCICE 9 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. f est-elle périodique ?
3. Déterminer la dérivée de f.
4. Résoudre dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, l'inéquation $\sqrt{\cos(x)} \geqslant \sqrt{\sin(x)}$.
   En déduire le signe de f' sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et le tableau de variations de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
5. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1$.

EXERCICE 10 :

1. Soit y un réel fixé. Montrer que l'équation $X^2 - 2yX - 1 = 0$ admet deux solutions réelles. Vérifier qu'elles sont de signes différents.
2. Soit y un réel fixé. Montrer que l'équation $\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = y$ admet une seule solution réelle.
3. Montrer que l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ est bijective. Déterminer son application réciproque et sa dérivée.

EXERCICE 11 :

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. Trouver une démonstration directe. (on pourra par exemple, écrire $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ sous la forme $\dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$ où a, b et c sont des réels à déterminer et écrire la somme sous forme de sommes télescopiques).

EXERCICE 12 :

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Soit A une partie de E. Montrer que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
2. En considérant l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$, montrer que l'inclusion précédente n'est pas une égalité.
3. Soit B une partie de F. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
4. En considérant l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$, montrer que l'inclusion précédente n'est pas une égalité.