EXERCICE 1 :

Calculer la limite en 0 de $f : x \longmapsto \dfrac{e^x + e^{-x} + 2\sin x - 4x}{x(e^x + e^{-x} + 2\cos x - 4)}$

• ◯ • ◯ •

Correction :

On utilise les développements limités pour déterminer des équivalents du numérateur et du dénominateur.

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)$
- $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)$
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$

Par opérations sur les développements limités,

$$e^x + e^{-x} + 2\sin x - 4x = \frac{x^5}{30} + o\left(x^5\right) \quad \textbf{et} \quad x(e^x + e^{-x} + 2\cos x - 4) = \frac{x^5}{6} + o\left(x^5\right)$$

Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{1/30 + o(1)}{1/6 + o(1)}$ donc $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{5}}$

EXERCICE 2 :

Calculer la limite en 0 de $g : x \longmapsto (\ln(e + x))^{1/x}$

• ◯ • ◯ •

Correction :
$g(x) > 0$ au voisinage de 0, on exprime $\ln g(x) = \dfrac{1}{x}\ln[\ln(e + x)]$

Or, $\ln(e + x) = \ln(e(1 + x/e)) = \ln e + \ln\left(1 + \dfrac{x}{e}\right) = 1 + \ln\left(1 + \dfrac{x}{e}\right)$ et, par utilisation du DL $x \mapsto \ln(1 + x)$ en 0 à l'ordre 1,

$$\ln(e + x) = 1 + \frac{x}{e} + o(x)$$

La forme du DL précédent, permet d'écrire : $\ln[\ln(e + x)] = \ln\left[1 + \dfrac{x}{e} + o(x)\right] = \dfrac{x}{e} + o(x)$ et $\ln g(x) = \dfrac{1}{e} + o(1)$ donc

$$\ln g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{e} \text{ et donc } \boxed{g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^{1/e}}$$

EXERCICE 3 :

1. Soit m un réel, $m > 1$, montrer que l'équation
$$x - m\ln\left(1 + \frac{x}{m + 1}\right) = 0$$
a une racine et une seule sur $]-2, -1[$, notée α_m.
2. Déterminer la limite de α_m quand m tend vers $+\infty$.

• ◯ • ◯ •

Correction :

1. Soit $f_m\ :\ x \longmapsto x - m\ln\left(1+\dfrac{x}{m+1}\right)$. f_m est définie sur $I_m\ =]-m-1;+\infty[$ et pour tout $m>1$, on a $]-2,-1[\subset I_m$. f_m est continue et dérivable sur I_m.

   $\forall x\in I_m,\ f_m'(x)=\dfrac{x+1}{x+m+1}$: f_m est strictement décroissante sur $]-m-1,1[$. f_m réalise donc une bijection de $]-2,-1[$ sur $]f_m(-1),f_m(-2)[$.

   Répondre à la question posée consiste désormais à prouver que $0\in]f_m(-1),f_m(-2)[$.

   - $f_m(0)=0$ et f_m est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$ donc $f_m(-1)<f_m(0)\Leftrightarrow f_m(-1)<0$.

   - $f_m(-2)=-2-m\ln\left(\dfrac{m-1}{m+1}\right)\underset{on\,pose}{=}h(m)$, h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$. On a successivement,
   $$h'(m)=\ln\left(\frac{m-1}{m+1}\right)-\frac{2m}{m^2-1}\qquad\text{et}\qquad h''(m)=\frac{4}{(m^2-1)^2}$$
     - ▷ h' est strictement croissante sur $]1,+\infty[$ et $h'(m)\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc $h'(m)<0$ sur $]1,+\infty[$;
     - ▷ h est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ et
   $$h(m)=-2-m\ln\left(1-\frac{1}{m}\right)+m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)\underset{DLs\,ordre\,1}{=}\mathrm{o}(1)\text{ donc }h(m)\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

     Ainsi $h(m)>0$ pour tout $m>1$, c'est à dire $f_m(-2)>0$.

   On a bien démontré que $0\in]f_m(-1),f_m(-2)[$ et il existe un unique $\alpha_m\in]-2,-1[$ tel que $f(\alpha_m)=0$.

2. $f(\alpha_m)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{m}\alpha_m-\ln\left(1+\dfrac{\alpha_m}{m+1}\right)=0.$

   $\alpha_m\in]-2,-1[$ donc $\left|\dfrac{\alpha_m}{m+1}\right|<\dfrac{2}{m+1}$ et donc $\dfrac{\alpha_m}{m+1}\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

   En utilisant le DL en 0 à l'ordre 2 de $x\mapsto\ln(1+x)$,
   $$\ln\left(1+\frac{\alpha_m}{m+1}\right)=\frac{\alpha_m}{m+1}-\frac{\alpha_m^2}{2(m+1)^2}+\mathrm{o}\left(\frac{\alpha_m^2}{(m+1)^2}\right)$$
   c'est à dire, $\dfrac{1}{m}\alpha_m=\dfrac{\alpha_m}{m+1}-\dfrac{\alpha_m^2}{2(m+1)^2}+\mathrm{o}\left(\dfrac{\alpha_m^2}{(m+1)^2}\right)$ et $\dfrac{1}{m(m+1)}\alpha_m=-\dfrac{\alpha_m^2}{2(m+1)^2}+\mathrm{o}\left(\dfrac{\alpha_m^2}{(m+1)^2}\right)$

   On simplifie par $\dfrac{\alpha_m}{m+1}$ qui n'est pas nul,
   $$\frac{1}{m}=-\frac{\alpha_m}{2(m+1)}+\mathrm{o}\left(\frac{\alpha_m}{m+1}\right)$$
   on obtient donc $\dfrac{\alpha_m}{2(m+1)}\underset{+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{m}$, et $\alpha_m\underset{+\infty}{\sim}-\dfrac{2(m+1)}{m}$ donc $\boxed{\alpha_m\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow}-2}$

EXERCICE 4 :

Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}-$espaces vectoriels ?

- $F_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,z-2x=y\right\}$;
- $F_2=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,|\,x+y+z+t\leqslant 1\right\}$;
- $F_3=\{P\in\mathbb{R}[X]\,|\,P(X+1)=2P(X)\text{ et }P(3)=0\}$;
- $F_4=\left\{f:x\longmapsto a\cos(x-\varphi)\ ;\ (a,\varphi)\in\mathbb{R}^2\right\}$;

• ○ • ○ •

Correction :

- $(0,0,0)\in F_1$ donc F_1 est non vide. Soit $(x,y,z)\in F_1$ et $(x',y',z')\in F_1$, on prouve facilement que pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')\in F_1$; ainsi F_1 est un $\mathbb{R}-$sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- $(1,0,0,0) \in F_2$ mais pas $2.(1,0,0,0) = (2,0,0,0)$ donc F_2 n'est pas un espace vectoriel (pas de stabilité par la multiplication par un scalaire)

- F_3 n'est constitué que du polynôme nul. En effet, si P est non nul et de degré n, le coefficent dominant de $P(X+1)$ est a_n et celui de $2P(X)$ est $2a_n$; les deux polynômes ne peuvent être égaux. F_3 est un $\mathbb{R}-$sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

- $x \longmapsto \cos x$ appartient à F_4 donc F_4 est non vide.
  Soit $(f_1, f_2) \in (F_4)^2$, avec $(a_1, \varphi_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(a_2, \varphi_2) \in \mathbb{R}^2$:
$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) + f_2(x) &= a_1 \cos(x - \varphi_1) + a_2 \cos(x - \varphi_2) \\
&= a_1(\cos x \cos \varphi_1 + \sin x \sin \varphi_1) + a_2(\cos x \cos \varphi_2 + \sin x \sin \varphi_2) \\
&= (\underbrace{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}_{\lambda_1}) \cos x + (\underbrace{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}_{\lambda_2}) \sin x \\
&= \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \cos x + \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \sin x \right) \\
&= a \cos(x - \varphi)
\end{aligned}$$
  avec $a = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$ et φ tel que $\cos \varphi = \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}$ et $\sin \varphi = \dfrac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}$
  Si $f \in F_4$ alors $\lambda \in F_4$. F_4 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.