EXERCICE 1 :

1. Prouver que l'équation $x^3 + nx = 1$ (E) admet une unique solution u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Prouver que $u_n \in]0,1]$.
3. On pose $f_n(x) = x^3 + nx - 1,\ x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Exprimer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

EXERCICE 2 :

1. En étudiant les variations de la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x) - x$, établir que pour tout $x \geqslant -1$, $\ln(1+x) \geqslant x$.
2. Soit $A = \left\{ \left(\dfrac{m+n+1}{m+n}\right)^{m+n},\ (m,n) \in \mathbb{N}^{*2} \right\}$
   Déduire du 1. que A est une partie majorée de $\mathbb{R}$ et calculer $\sup(A)$.

EXERCICE 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite <u>décroissante</u> de <u>limite 0</u> telle que $\underline{u_{n+1} + u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}}$. On souhaite démontrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.

1. On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n(u_n + u_{n+1})$.
   (a) Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et calculer sa limite.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $a_n \leqslant 2nu_n \leqslant \dfrac{n}{n-1}a_{n-1}$. Conclure.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. (u_n) vérifie-t-elle les conditions énoncées sur la suite (u_n) au début de l'exercice ? Donner un équivalent en $+\infty$ de u_n. Conclure.

EXERCICE 4 :

EXERCICE 5 :