I Probabilités sur un ensemble fini

I.1 Vocabulaire

- Expérience aléatoire : c'est une expérience qui a plusieurs issues possibles et l'on ne peut pas prévoir avec certitude quel sera le résultat. Elle est liée au hasard.

- Univers Ω : c'est l'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire.
$$\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$
- Événement : c'est un résultat composé d'une ou plusieurs issues d'une expérience aléatoire.

- Loi de probabilité : Définir une loi de probabilité sur Ω, c'est associer à chaque issue x_i un nombre p_i positif ou nul vérifiant $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ tel que :
$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1 \text{ où } n \text{ est le nombre d'issues de l'univers.}$$
p_i est appelée probabilité de l'issue x_i et cela se note : $p(x_i) = p_i$.

- Arbre pondéré : sur l'extrémité des branches figurent les issues (ou événements). Sur les branches, les valeurs des probabilités.

Exemple 1 Dans une région imaginaire, les météorologistes ont constaté, suite à un nombre de relevés, que :
- si le temps est sec (S) un jour, il y a cinq chances sur six qu'il soit sec le lendemain ;
- si le temps est humide (H) un jour, il y a deux chances sur trois qu'il soit humide le lendemain ;
  On est dimanche et le temps est sec. Dessiner un arbre pondéré distinguant les possibilités de temps le mardi.

Exemple 2 :

- On lance un dé et on regarde le numéro de la face obtenue :
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
- On lance un dé et on regarde si le numéro de la face obtenue est pair ou impair : $\Omega = \{P, I\}$
- On lance une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}$
- On lance deux pièces de monnaie : $\Omega = \{...........\}$
- On lance deux dés : $\Omega = \{(i, j),\ 1 \leqslant i, j \leqslant 6\}$

I.2 Choix de la loi de probabilité associée à une expérience aléatoire

Définition 1 *Modéliser une expérience aléatoire par une loi de probabilité c'est choisir une loi qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.*

Remarque 1 :
En pratique, l'approche se fait par l'expérience ou la simulation. On répéte un grand nombre de fois une expérience et on calcule les fréquences de chaque issue : cela constitue un échantillon. On fabrique un grand nombre d'échantillons et malgré la fluctuation des fréquences, cela permet d'attribuer une probabilité à chaque issue.

Exemple 3 : Une urne comporte six boules : 3 rouges, 2 jaunes et 1 bleue. On prélève une boule et on note sa couleur. Quelle loi de probabilité associe-t-on à cette expérience ?

1. Équiprobabilité :

   Lorsque Ω est de cardinal fini (nombre d'éléments de Ω fini) et que l'on attribue la même probabilité à chaque issue, on dit que l'on choisit une probabilité p **équirépartie**, on a alors :

   - pour toute issue x_i de Ω : $p(x_i) = \dfrac{1}{card(\Omega)}$
   - pour tout événement A : $p(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{nombre\ d'éléments\ de\ A}{nombre\ d'éléments\ de\ \Omega}$

   On dit aussi, dans une telle situation qu'il y a **équiprobabilité**.

   Exemple 4 :

   (a) Quelle loi de probabilité associe-t-on au jeu du Pile ou Face avec une pièce de monnaie équilibrée ?

   (b) On lance deux dés équilibrés et l'on calcule la somme des points obtenus. Quelles sont les issues possibles ? La loi équirépartie est-elle adaptée à cette expérience aléatoire ?

   EXERCICE 1 :
   Dans un jeu de 32 cartes, les cartes sont réparties en quatre catégories (coeur, carreau, trèfle, pique). Dans chaque catégorie, il y a huit cartes : As - Roi - Dame - Valet - 10 - 9 - 8 - 7.
   On tire une carte au hasard.

   (a) Quelle est la probabilité de tirer une carte rouge ?

   (b) Quelle est la probabilité de tirer un roi ?

   (c) Quelle est la probabilité de tirer une sept noir ?

2. Cas général : probabilité d'un événement.

Définition 2 $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. On appelle événement toute partie A de Ω.*

Exemple 5 On lance un dé équilibré. $A = \{2, 4, 6\}$ est l'événement : "La face obtenue est un chiffre pair".

Théorème 1 La probabilité d'un événement A est la somme de toutes les probabilités des issues appartenant à A.

Exemple 6 1. Calcul de $p(A)$ dans l'exemple précédent : $p(A) = p(2)+p(4)+p(6) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. 2. Calcul de la probabilité de l'événement S_{ma} dans l'exemple 1 : $S_{ma} = \{S \cap S; H \cap S\}$ donc $p(S_{ma}) = p(S \cap S) + p(H \cap S) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$

EXERCICE 2 21 p 143

I.3 Calculs de probabilités d'événements

1. Événement contraire :

Définition 3 *l'événement contraire d'un événement A est composé des issues de l'univers qui ne sont pas dans A. On le note $\overline{A}$.*

Exemple 7 :
On lance un dé équilibré et on relève la face obtenue.
A :« La face obtenue est 5 ou 6 » . Décrire $\overline{A}$

Propriété 1 La probabilité de l'événement contraire d'un événement A est :

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

Exemple 8 :
Reprendre l'exemple précédent et calculer $p(\overline{A})$.

2. Intersection et réunion d'événements :

Définition 4 *A et B sont deux événements constitués d'issues d'un univers Ω.*

- *L'intersection de A et de B est l'événement noté $A \cap B$ formé des issues communes à l'événement A* ***et*** *à l'événement B.*
- *La réunion de A et de B est l'événement noté $A \cup B$ formé des issues constituant l'événement A* ***ou*** *l'événement B.*

Exemple 9 On dispose d'une urne à l'intérieur de laquelle il y a 10 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 10. On tire au hasard une boule. On considère l'événement A : « le numéro de la boule est divisible par 5 » et l'événement B : « le numéro de la boule est strictement inférieur à 6 » . Décrire $A \cap B$ et $A \cup B$.

Propriété 2 Soit p une loi de probabilité sur un univers Ω. Pour tout événement A et B :

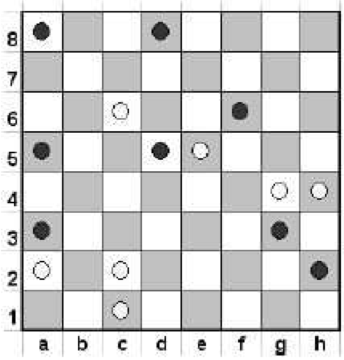
$$p(A \cap B) + p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

3. Événements incompatibles

Définition 5 *Deux événements A et B sont dits incompatibles lorsque : $p(A \cap B)$=0.*

Conséquence : Pour deux événements incompatibles A et B, on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

EXERCICE 3 :



L'échiquier ci-contre est formée de rangées (lignes ou colonnes) repérées par un entier de 1 à 8 ou une lettre de a à h. Sur cet échiquier sont placés des pions blancs et des pions noirs. On choisit au hasard une rangée et on s'intéresse aux événements : A : « la rangée comporte au moins deux pions » et B : « il y a au moins un pion noir sur la rangée » .

1. Quelle est la probabilité de A, de B, de $A \cap B$?
2. Quelle est la probabilité de l'événement $A \cup B$?
3. Définir les événements contraires des événements A et B. Calculer $p(\overline{A})$ et $p(\overline{B})$.

II Échantillonnage

II.1 Notion d'échantillon

Une expérience aléatoire fait intervenir le hasard. On ne peut pas prévoir son issue.
Pour « mesurer » ce hasard, on reproduit un grand nombre de fois cette expérience et on observe les résultats. On obtient un **échantillon** dont la **taille** est égale au nombre de fois où l'on a répété l'expérience. Chaque issue apparaît dans l'échantillon avec une certaine fréquence.

Exemple 10 On lance 10 fois un dé cubique équilibré : on obtient 1-5-2-1-6-3-2-2-6-2. Ceci un échantillon de taille 10. Compléter le tableau des fréquences pour cet échantillon,

$Issue$	1	2	3	4	5	6
$Fréquence$						

Un échantillon de taille n est constitué des résultats obtenus par n répétitions indépendantes d'une même expérience aléatoire.

II.2 Fluctuation d'échantillonnage

Exemples de constitutions de plusieurs échantillons de taille n d'une même expérience aléatoire : voir TD. (utilisation d'un tableur, algorithme, ...)

Le caractère aléatoire d'une expérience implique une variation de résultat d'un échantillon à l'autre : c'est le phénomène de **fluctuation d'échantillonnage**.

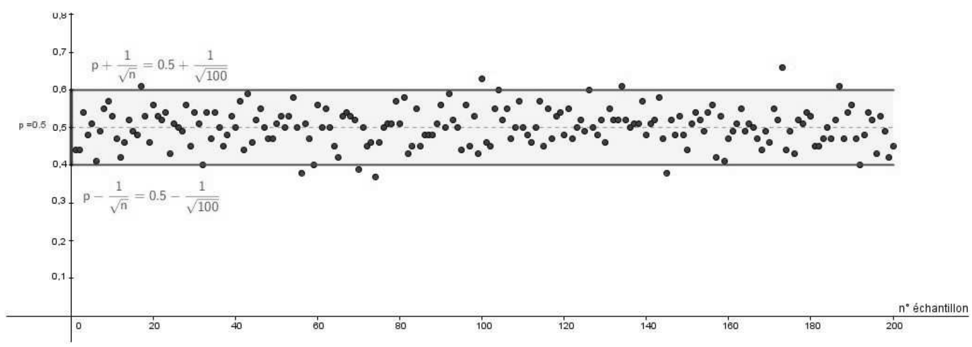
Remarque 2 Plus la taille de l'échantillon est grande, moins il y a de fluctuation de la fréquence observée autour de la fréquence théorique.

III Intervalle de fluctuation

III.1 Exemple et définition

On lance 100 fois une pièce de monnaie équilibrée. (on réalise une simulation)
On calcule la fréquence d'apparition de « Pile » dans cet échantillon de taille 100. (algorithme)

On simule 200 échantillons de taille 100. 200 fréquences sont obtenues et ne sont pas égales en raison de la fluctuation d'échantillonnage. Environ dans 95% des cas, les résultats se trouvent entre 0,4 et 0,6. Si l'on renouvelle cette simulation, on constera le même phénomène.
[0,4 ;0,6] est un intervalle de fluctuation au seuil 95% des fréquences des échantillons de taille 100.



Dans une population, on note p la proportion théorique d'individus ayant un caractère donné.
On considère un échantillon de taille n dans cette population et on calcule la fréquence f du caractère dans cet échantillon.
Si $n \geqslant 25$ et $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$, alors f appartient à l'intervalle $\boxed{I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]}$ dans environ 95% des cas.
I est appelé **intervalle de fluctuation** au seuil 95%.

Exemple 11 Toujours dans le cas du lancer de pièce équilibrée. Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% pour des échantillons de taille 2500. (algorithme)

III.2 Prise de décision

R è g l e d e D é c i s i o n :

On considère une population dans laquelle **on fait l'hypothèse que la proportion d'un certain caractère est** p. On souhaite tester la validité de cette hypothèse.

Pour cela, on prélève au hasard et avec remise un échantillon de taille n sur lequel on observe la **fréquence** f **d'apparition de ce caractère**, puis on détermine I_n l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% correspondant.

- Si $f \notin I_n$, on rejette l'hypothèse avec un risque d'erreur de 5%.
- Sinon, on ne la rejette pas.

Remarque 3 Il est naturel que f et p n'est pas la même valeur. La question est de savoir si cette différence est significative ou non. L'intervalle I_n contient plus de 95% des fréquences des échantillons de taille n.

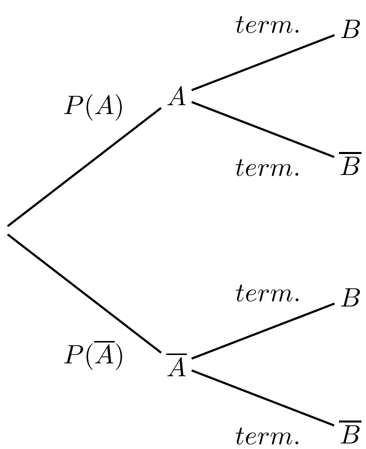
Exemple 12 La direction d'une grosse société estime que 54% des salariés qui déjeunent sur place sont satisfaits du restaurant d'entreprise. Afin de vérifier cette hypothèse, une enquête auprès de 50 salariés est organisée. 21 salariés déclarent que la restauration leur convient.

Que penser de l'affirmation de la direction ?

IV Annexe

Règles de représentation et de calcul sur un arbre de probabilités

A et B deux événements.



Règles et calculs sur un arbre de probabilités :

- À chaque « nœud » figure une issue (ou événement).
- On indique au dessus de chaque branche qui y conduit sa probabilité.
- La somme des probabilités de toutes les branches partant d'un même noeud est égale à 1.
- L'événement intersection est le résultat d'un chemin possible sur l'arbre et sa probabilité est le **produit** des probabilités figurant sur chaque branche parcourue.
- La probabilité de l'événement $B = \left\{A \cap B; \overline{A} \cap B\right\}$ se calcule en ajoutant les probabilités $P(A \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap B)$: on fait donc la somme des produits de probabilités résultant du « passage » sur les chemins conduisant à B.

EXERCICE 4 Un concours du Ministère de l'Intérieur contient trois épreuves indépendantes.
On dispose des statistiques suivantes au vu des dernières années.

- Épreuve de culture générale : taux de réussite de 70% ;
- Épreuve de logique : taux de réussite de 45% ;
- Épreuve physique : taux de réussite de 60%.

Quelle est la probabilité de réussir les trois épreuves ?
On est reçu au concours si on réussit au moins deux épreuves sur trois. Quelle est la probabilité d'être reçu à ce concours ?