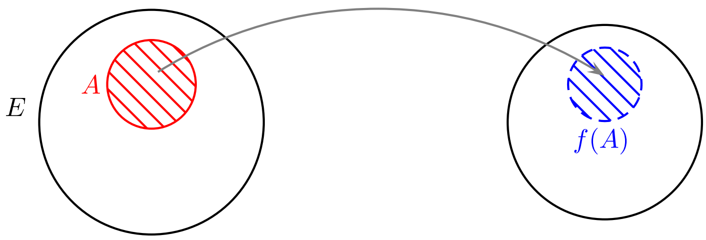
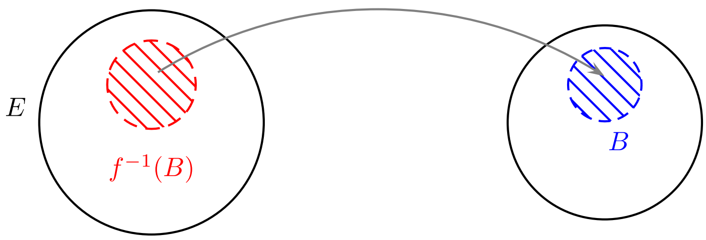
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Soit A une partie de E. Montrer que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
2. En considérant l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$, montrer que l'inclusion précédente n'est pas une égalité.
3. Soit B une partie de F. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
4. En considérant l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$, montrer que l'inclusion précédente n'est pas une égalité.

Correction :



Signification de f(A) :
A partie de E, $f(A)$ est une partie de F dont les éléments ont la propriété de s'écrire $f(a)$ où a est un élément de A.
Ce qui s'écrit en langage mathématique
$f(A) = \{y \in F \text{ tels que } \exists a \in A, y = f(a)\}$ ($\bigstar$)
ou $f(A) = \{f(a),\ a \in A\}$



Signification de $\mathbf{f^{-1}(B)}$:
B partie de F, $f^{-1}(B)$ est une partie de E dont les éléments ont une image dans B.
Ce qui s'écrit en langage mathématique
$f^{-1}(B) = \{x \in E \text{ tels que } f(x) \in B\}$ (Δ)

1. Soit $x \in A$. On a donc $f(x) \in f(A)$ puisque $f(A)$ est l'ensemble des images des éléments de A. Or d'après ce qui précède $f^{-1}(f(A)) = \{x \in E \text{ tels que } f(x) \in f(A)\}$, donc $x \in f^{-1}(f(A))$ et l'inclusion est établie.

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Avec $A = [0;1]$, $f(A) = [0;1]$ et $f^{-1}(f(A)) = [-1;1]$, on a bien $A \subset f^{-1}(f(A))$ (inclusion stricte)

3. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$ (grâce à ($\bigstar$)).
Mais dire que $x \in f^{-1}(B)$ signifie que $f(x) \in B$ (grâce à (Δ)), mais comme $y = f(x)$ alors $y \in B$.
L'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ est établie.

4. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Avec $B = [-1;4]$, $f^{-1}(B) = [-2;2]$ et $f(f^{-1}(B)) = [0;4]$, on a bien $f(f^{-1}(B)) \subset B$ (inclusion stricte)