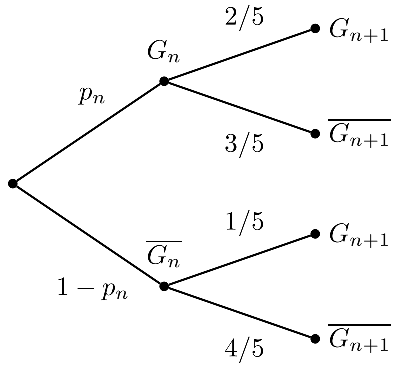
TS	GRILLE de correction DS5 NOM :	Note	

E1	Réponse	Points	Obtenus
Q.1	Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\mathrm{e}^{2x} - 10 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} = 5 \Leftrightarrow 2x = \ln 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 5}{2}$. $S = \{\dfrac{\ln 5}{2}\}$.	1	
Q.2	**Domaine de validité** : L'équation est définie pour $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$. Le domaine de validité est donc $]0; +\infty[$. **Résolution : sur** $]0; +\infty[$ $\ln(2x) + \ln(x+2) \leqslant \ln(6) \Leftrightarrow \ln(2x(x+2)) \leqslant \ln 6 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x \leqslant 6 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 6 \leqslant 0$. Or $2x^2 + 4x - 6$ est un polynôme de degré 2, $\Delta = 16 + 48 = 64 > 0$. Ainsi le polynôme admet deux racines qui sont $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$, ainsi $2x^2 + 4x - 6 \leqslant 0$ sur $[-3; 1]$, On en déduit que $S =]0; 1]$.	0,5 1,5	
Q.3	On cherche n tel que $v_n \geqslant 4,9$ Or $v_n \geqslant 4,9 \Leftrightarrow 5 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} \geqslant 4,9 \Leftrightarrow -\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} \geqslant -0,1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} \leqslant 0,1$ La fonction ln étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$, il vient : $v_n \geqslant 4,9 \Leftrightarrow \ln\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \leqslant \ln 0,1$ $\Leftrightarrow (n+1)\ln\left(\dfrac{2}{3}\right) \leqslant \ln 0,1 \Leftrightarrow (n+1) \geqslant \dfrac{\ln(0,1)}{\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)}$ car $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right) < 0$ $\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(0,1)}{\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)} - 1 \approx 4,67$. Le plus petit entier n tel que $v_n \geqslant 4,9$ est donc 5.	2	
	Total $\longrightarrow$ 5 points		

E2	Réponse	Points	Obtenus
Q.A.1		0.5	
Q.A.2	$G_{n+1} = \{G_{n+1} \cap G_n ; G_{n+1} \cap \overline{G_n}\}$ et d'après la formule des probabilités totales, $p_{n+1} = p(G_{n+1}) = p(G_{n+1} \cap G_n) + p(G_{n+1} \cap \overline{G_n})$ $= p(G_n) \times p_{G_n}(G_{n+1}) + p(\overline{G_n}) \times p_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) = p_n \times \dfrac{2}{5} + (1 - p_n) \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{5}$	1,5	
Q.A.3.a	$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5}p_n - \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{5}\left(p_n - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{5}u_n$. (u_n) est bien géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$	1 0.5	
Q.A.3.b	$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 q^{n-1} = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$. Or $p_n = u_n + \dfrac{1}{4}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui implique que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{4}$	1	

E2	Réponse	Points	Obtenus
Q.A.3.c	$\frac{1}{5} \in]-1;1[$ donc $\left(\frac{1}{5}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par opérations sur les limites, $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$.	0.5	
Q.A.3.d	*Variables* : p est un nombre réel et n est un nombre entier naturel. *Initialisation* : Affecter à p la valeur 1. Affecter à n la valeur 1. *Traitement* : Tant que **p>0,251** Affecter à n la valeur **n+1** Affecter à p la valeur $\frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$. Fin de Tant que. *Sortie* : Afficher n. La valeur de n que l'algorithme affiche est 6.	1 0,5	
Q.B.1.a	Chaque partie de ce second jeu est une épreuve de Bernoulli : on gagne ou l'on perd. On répète de manière indépendante 10 épreuves de Bernoulli, donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de parties gagnées suit donc une loi binomiale de paramètres 10 et $1/4$.	1	
Q.B.1.b	$P(X=4) = \binom{10}{4}(\frac{1}{4})^4(\frac{3}{4})^{10-6} \approx 0,146$ $(X=0)$ et $(X \geqslant 1)$ sont des événements contraires donc : $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 0,944$	+1 0.5	
Q.B.1.c	Un joueur a en moyenne « l'espoir » de gagner 2,5 parties sur 10 parties jouées.	0.5	
Q.B.2.a	L'espérance de gain du joueur est $E(X) \times 8 = 20$€, alors que son engagement pour 10 parties est 30€. Le joueur perdrait en moyenne 10€.	0.5	
Q.B.2.b	Pour un bénéfice supérieur à 40€, compte-tenu de l'engagement de 30€, il faut gagner au moins 9 parties ($9 \times 8 - 30 > 40$) $p(X \geqslant 9) = p(X=9) + p(X=10) = \binom{10}{9}0,25^9 \times 0,75 + 0,25^{10} \approx 0,00003$	1	
	Total $\longrightarrow$ 10 points		
E 3	Réponse	Points	Obtenus
A	Les solutions de l'équation (E) sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes. Il semble y en avoir 2. L'une comprise entre -1 et 0, l'autre entre 0 et 1.	0,5	
B 1a	$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x^3 = x^2(1+x)$. Comme un carré est positif ou nul, $x^2 + x^3$ est du signe de $1+x$. On en déduit que • $x^2 + x^3 = 0$ pour $x \in \{-1\ ;\ 0\}$. • $x^2 + x^3 > 0$ pour $x \in]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$. • $x^2 + x^3 < 0$ pour $x \in]-\infty\ ;\ -1[$.	1	
B 1b	x solution de $(E) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 3\left(x^2 + x^3\right) \Leftrightarrow x^2 + x^3 = \frac{\mathrm{e}^x}{3}$. Or, pour tout réel x, $\frac{\mathrm{e}^x}{3} > 0$, alors que $x^2 + x^3 \leqslant 0$ pour $x \in]-\infty\ ;\ -1]$. (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$.	1	
B 1c	$\mathrm{e}^0 = 1$ et $3 \times (0^2 + 0^3) = 0$. Donc 0 n'est pas solution de (E).	0,5	
B 2	$\forall x \in]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[,\ (E) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 3\left(x^2+x^3\right)$ $\Leftrightarrow \ln \mathrm{e}^x = \ln\left(3\left(x^2+x^3\right)\right)$ $\Leftrightarrow x = \ln 3 + \ln\left(x^2(1+x)\right)$ $\Leftrightarrow x = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x)$ $\Leftrightarrow \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x = 0$ $\Leftrightarrow h(x) = 0$	1	

<table>
<tr><td>E 3</td><td>Réponse</td><td>Points</td><td>Obtenus</td></tr>
<tr><td>B 3a</td><td>

h est une somme de fonctions dérivables, donc h est bien dérivable sur $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$.

Si $u>0$ et dérivable sur un intervalle, alors $\ln u$ est dérivable sur cet intervalle et sa dérivée est $\dfrac{u'}{u}$.

Pour tout réel $x \in]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[, h'(x)=0+\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{1}{x+1}-1$

$h'(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x+1}-1=\dfrac{2(x+1)+x-x(x+1)}{x(x+1)}$

On a bien : $h'(x)=\dfrac{-x^2+2x+2}{x(x+1)}$.

</td><td>1,5</td><td></td></tr>
<tr><td>3b</td><td>

Pour étudier le sens de variation de h, on étudie le signe de sa dérivée. Le numérateur et le dénominateur sont des trinômes du second degré.

Pour le dénominateur, les racines sont 0 et -1, le coefficient dominant est $1>0$. Il est donc positif « à l'extérieur » des racines, négatif « entre » les racines (voir le tableau).
Pour le numérateur, pas de racine évidente. On calcule donc le discriminant. On trouve : $\Delta=12>0$ et les deux racines sont $x_1=\dfrac{-2+2\sqrt{3}}{-2}=1-\sqrt{3}$ et $x_2=1+\sqrt{3}$. Le coefficient dominant est $-1>0$, d'où le signe.

<table>
<tr><td>x</td><td>-1</td><td></td><td>$1-\sqrt{3}$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$1+\sqrt{3}$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$-x^2+2x+2$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td></td><td>$+$</td><td></td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>$x(x+1)$</td><td>0</td><td></td><td>$-$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$+$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$h'(x)$</td><td>$\|$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>$\|$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
</table>

</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

Étude de certaines limites aux bornes :

• Limite en 0 : $\lim\limits_{x\to0} \ln 3 - x = \ln 3$
$\lim\limits_{x\to0} x^2=0$ et $\lim\limits_{X\to0} \ln X=-\infty$ par composition, on a $\lim\limits_{x\to0} \ln x^2=-\infty$
Puis $\lim\limits_{x\to0} 1+x=1$ et $\lim\limits_{X\to1} \ln X=0$ par composition, $\lim\limits_{x\to0} \ln(1+x)=0$
Enfin, par somme $\lim\limits_{x\to0} h(x)=-\infty$

• Limite en $+\infty$

$h(x)=\ln 3+(x+1)\left(\dfrac{2\ln x}{x+1}+\dfrac{\ln(1+x)}{x+1}-\dfrac{x}{x+1}\right)$.
Or

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=1$

• $\left\{\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x &=& +\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln X}{X} &=& 0\end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x+1}=0$

• Pour tout $x>1, 0\leqslant\dfrac{\ln x}{x+1}<\dfrac{\ln x}{x}$. Par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et le théorème d'encadrement assure que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x+1}=0$
Finalement avec des opérations élémentaires, on obtient enfin $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-\infty$.
Enfin à la calculatrice on obtient les valeurs approchées suivantes
$h\left(1-\sqrt{3}\right)\approx-0,11$ et $h(1+\sqrt{3})\approx1,69$.

</td><td>1</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>E 3</th><th>Réponse</th><th>Points</th><th>Obtenus</th></tr>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>-1</td><td></td><td>$1-\sqrt{3}$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>α_1</td><td></td><td>$1+\sqrt{3}$</td><td></td><td>α_2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$h'(x)$</td><td>‖</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>‖</td><td>$+$</td><td></td><td></td><td>0</td><td>$-$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$h(x)$</td><td>‖</td><td>↗</td><td>$h(1-\sqrt{3})<0$</td><td>↘ $-\infty$</td><td>‖ $-\infty$</td><td>↗</td><td>0</td><td>↗</td><td>$h(1+\sqrt{3})>0$</td><td>↘</td><td>0</td><td>↘</td><td>$-\infty$</td></tr>
</table>
</td><td>0,5</td><td></td></tr>
<tr><td>3c</td><td>

- Sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$, d'après le tableau de variation h admet un maximum en $1-\sqrt{3}$. Or $h(1-\sqrt{3}) \approx -0,11$ donc l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-1\ ;\ 0[$. C'est une première contradiction avec la conjecture de la partie A.
- Sur l'intervalle $]0\ ;\ 1+\sqrt{3}[$ la fonction h est continue et strictement croissante ; 0 est compris entre $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ et $h\left(1+\sqrt{3}\right)$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α_1 sur $\left]0\ ;\ 1+\sqrt{3}\right[$.
- Sur l'intervalle $[1+\sqrt{3} ; +\infty[$ la fonction h est continue et strictement décroissante ; 0 est compris entre $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $h\left(1+\sqrt{3}\right)$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α_2 sur $\left[1+\sqrt{3} ; +\infty\right[$.

La calculatrice donne : $h(0,61) \approx -0,02$ et $h(0,62) \approx 0,24$. Une valeur approchée de α_1, arrondie au centième est donc $0,62$.
Puis $h(7,11) \approx 4,7\times 10^{-3}$ et $h(7,12) \approx -1\times 10^{-3}$. Une valeur approchée de α_2, arrondie au centième est donc $7,12$.
</td><td>1

0,5</td><td></td></tr>
<tr><td>3d</td><td>La conjecture de la partie A est erronée. Il y a bien deux solutions mais pas dans les intervalles prévus.</td><td>0,5</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Total ⟶</td><td>10 points</td><td></td></tr>
</table>