TS	**GRILLE DE CORRECTION - Devoir Surveillé n°1 - 29 septembre 2017**	NOTE :	

E1	Réponse	Points	Obtenus
Q1.	Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n - 3 = \dfrac{5n}{1+n^2} - 3 = \dfrac{-3n^2+5n-3}{1+n^2}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $1+n^2 > 0$ donc le signe de $u_n - 3$ dépend de celui de $-3n^2+5n-3$. Comme $\Delta < 0$ alors $-3n^2+5n-3 < 0$ (du signe de $a = -3$). $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow u_n \leqslant 3$	1.5	
Q2.	$f : x \mapsto \dfrac{5x}{1+x^2}$ définie sur $I = [0;+\infty[$. f est dérivable sur I et, pour tout x de I, $f'(x) = \dfrac{-5(x^2-1)}{(1+x^2)^2}$. Pour tout $x > 1$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $[1;+\infty[$, ainsi (u_n) est décroissante à partir du rang 1. (en effet, $u_0 = 0$ et $u_1 = 2,5$)	1.5	
Q3.	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{5n}{1+n^2} = \dfrac{5n}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$. Les deux suites $\left(\dfrac{5}{n}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ tendent toutes les deux vers 0 donc, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.	1.5	
	Total $\longrightarrow$	**4.5 points**	

E2	Réponse	Points	Obtenus
QA1.	$u_1 = \dfrac{2}{3}u_0 - 1 = -1-1 = \boxed{-2}$; $u_2 = \dfrac{2}{3}\times(-2)-1 = \boxed{-\dfrac{7}{3}}$ et $u_3 = \dfrac{2}{3}\times\left(-\dfrac{7}{3}\right)-1 = \boxed{-\dfrac{23}{9}}$.	0.5	
QA2a.	$\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - 1 = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{2}{3}x - 1$	0.5	
QA2b.	Courbe et termes de la suite représentés.	1	
QA2c.	Conjectures : la suite (u_n) semble décroissante et tous ses termes être compris entre -3 et 0, la suite semble donc bornée.	0.5	
QA3a.	$\forall n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$: $-3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 0$. **Initialisation :** $n = 0$. $u_1 = -2$, on a bien $-3 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 0$ donc $P(0)$ est vraie. **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $P(n)$ vraie et on cherche à démontrer que cette hypothèse implique $P(n+1)$ vraie. $P(n)$ vraie $\Leftrightarrow -3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}\times(-3) \leqslant \dfrac{2}{3}u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{3}u_n \leqslant \dfrac{2}{3}\times 0 \Leftrightarrow$ $-2-1 \leqslant \dfrac{2}{3}u_{n+1} - 1 \leqslant \dfrac{2}{3}u_n - 1 \leqslant -1$. $\Rightarrow -3 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow P(n+1)$ vraie. **Conclusion :** D'après le raisonnement par récurrence, $-3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.	2	
QA3b.	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-3 \leqslant u_n \leqslant 0$ donc (u_n) est bornée.	0.5	
QA3c.	Si $u_0 = -5$, on a alors $u_1 = -\frac{13}{3}$ et $u_2 = -\frac{35}{9}$. on observe que $-5 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant -3$. En procédant comme nous l'avons fait au 3.a, on prouverait que $-5 \geqslant u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, la suite (u_n) serait croissante.	1	
QB1.	Pour tout entier naturel n, $\begin{aligned} v_{n+1} &= 2u_{n+1}+6 \\ &= 2\left(\dfrac{2}{3}u_n - 1\right)+6 \\ &= \dfrac{4}{3}u_n + 4 \\ &= \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2}\times(v_n-6)\right)+4 \\ &= \dfrac{2}{3}v_n \end{aligned}$	1	

QB2.	$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 q^n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $u_n = \frac{1}{2}(v_n - 6) = \frac{1}{2}\left[3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 6\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3$	1	
QB3.	$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0 \dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 9\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$	1	
QB4.	$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2u_n + 6 \Rightarrow S_n = 2T_n + 6(n+1)$ d'où $T_n = \frac{1}{2}(S_n - 6(n+1))$ $= \ldots = \frac{3}{2} - 3n - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$	1	
	Total $\longrightarrow$	**10 points**	

E3	Réponse	Points	Obtenus
Q1a.	On remarque que l'on passe d'un terme de la suite au suivant en multipliant par $0,5$; on peut donc conjecturer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5.	0.5	
Q1b.	Pour tout entier naturel n, $\begin{aligned} v_{n+1} &= (n+2)u_{n+1} \\ &= (n+2) \times \tfrac{n+1}{2n+4} u_n \\ &= \tfrac{(n+2)(n+1)}{2(n+2)} u_n \\ &= \tfrac{1}{2}(n+1)u_n \\ &= \tfrac{1}{2} v_n \end{aligned}$ Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 de premier terme $v_0 = u_0 = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 q^n = \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$	1.5	
Q1c.	Comme la raison de la suite (v_n) est strictement comprise entre -1 et 1, on peut dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.	0.5	
Q2.	$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (n+1)u_n \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{n+1} v_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc par produit de limites, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$	1	

	Total $\longrightarrow$	**3.5 points**	
E4	Réponse	Points	Obtenus
Q1.	$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2n^2 - 2 + 2}{n+1} = \frac{2(n^2-1)}{n+1} + \frac{2}{n+1} = 2(n-1) + \frac{2}{n+1}$ ou utiliser la méthode d'identification des coefficients.	1	
Q2.	Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2(n-1) = +\infty$, par addition de limites, on trouve que (u_n) diverge et que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.	1	
Q3a.	Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$ $(A \in \mathbb{R})$ contient, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite. En particulier, il existe un entier n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n \in [100; +\infty[$.	0.5	
Q3a.	À la calculatrice, on trouve $n_1 = 51$.	0.5	
Q3a.	Rassuré sur l'existence de n_1, on peut le chercher en cherchant le premier entier naturel vérifiant $u_n \geqslant 100$. $u_n \geqslant 100 \Leftrightarrow \frac{2n^2}{n+1} \geqslant 100 \Leftrightarrow 2n^2 \geqslant 100n + 100 \Leftrightarrow 2n^2 - 100n - 100 \geqslant 0$ $\Delta = 10000 + 800 = 10800$ d'où deux solutions dont la positive $n_2 = \frac{100 + \sqrt{10800}}{4}$. On prend $n_1 = E(n_2) + 1 = 51$.	1	
	Total $\longrightarrow$	**4 points**	