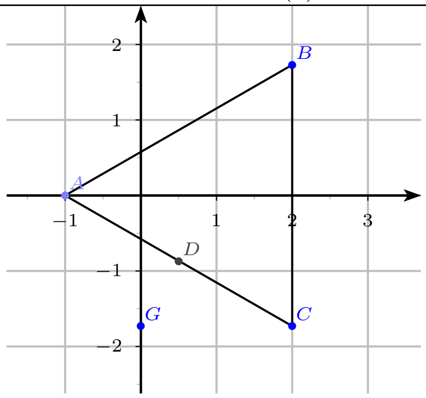
TS	**GRILLE DE CORRECTION - Devoir Surveillé n°3 - novembre 2016**	NOTE :	

E1	Réponse	Points	Obtenus
1.	$(2+4\mathrm{i})z+5=(5+\mathrm{i})z+3\mathrm{i}$ $\Leftrightarrow (2+4\mathrm{i}-5-\mathrm{i})z=-5+3\mathrm{i}$ $\Leftrightarrow (-3+3\mathrm{i})z=-5+3\mathrm{i}$ $\Leftrightarrow (-3-3\mathrm{i})(-3+3\mathrm{i})z=(-5+3\mathrm{i})(-3-3\mathrm{i})$ donc $\boxed{S=\left\{\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\mathrm{i}\right\}}$ $\Leftrightarrow 18z=24+6\mathrm{i}$ $\Leftrightarrow z=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\mathrm{i}$	2	
2.	$3(1+\mathrm{i})z=1-\mathrm{i}\overline{z}$ $\Leftrightarrow (3+3\mathrm{i})z+\mathrm{i}\overline{z}-1=0$ $\underset{z=x+\mathrm{i}y}{\Leftrightarrow} (3+3\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y)+\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)-1=0$ $\Leftrightarrow 3x-2y-1+\mathrm{i}(4x+3y)=0$ donc $\boxed{S=\left\{\frac{3}{17}-\frac{4}{17}\mathrm{i}\right\}}$ $\Leftrightarrow 3x-2y-1=0 \quad \text{et} \quad 4x+3y=0$ $\Leftrightarrow x=\frac{3}{17} \quad \text{et} \quad y=-\frac{4}{17}$	3	
	Total $\longrightarrow$	**5 points**	

E3	Réponse	Points	Obtenus
1.a	$P(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-3+7=-1-3-3+7=0$		
1.b.	Pour tout nombre complexe z, $(z+1)(z^2+az+b)=z^3+(1+a)z^2+(a+b)z+b$. Par identification $P(z)=(z+1)(z^2+az+b) \Leftrightarrow \begin{cases}1+a=-3\\a+b=3\\b=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-4\\b=7\end{cases}$. Ainsi, pour tout nombre complexe z, $P(z)=(z+1)(z^2-4z+7)$		
1.c	$P(z)=0 \Leftrightarrow (z+1)(z^2-4z+7)=0 \Leftrightarrow z+1=0$ ou $z^2-4z+7=0$. Résolution de $z^2-4z+7=0$. $\Delta=16-28=-12$. $\Delta<0$, donc l'équation $z^2-4z+7=0$ admet deux solutions complexes conjugués. $z_1=\frac{4-\mathrm{i}\sqrt{12}}{2}=2-\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2=2+\mathrm{i}\sqrt{3}$. Ainsi les solutions de $P(z)=0$ sont $S=\{-1;2-\mathrm{i}\sqrt{3};2+\mathrm{i}\sqrt{3}\}$.		
2.a.			
2.b.	$AB=\sqrt{(2-(-1))^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}$ $BC=\sqrt{(2-(2))^2+(-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}$ $AC=\sqrt{(2-(-1))^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}$ Ainsi le triangle ABC est équilatéral		
2.c.	D est le milieu de $[AC]$, ainsi $z_D=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{-1+2-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ D'où $z_D=\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$		

2.d.	On calcule les affixes des vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BG}$. $z_{\overrightarrow{BD}} = z_D - z_B = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 2 - \mathrm{i}\sqrt{3} = -\dfrac{3}{2} - \mathrm{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Puis $z_{\overrightarrow{BG}} = z_G - z_B = -\mathrm{i}\sqrt{3} - 2 - \mathrm{i}\sqrt{3} = -2 - \mathrm{i}2\sqrt{3}$. Ainsi, $z_{\overrightarrow{BD}} = \dfrac{3}{4} z_{\overrightarrow{BG}}$, d'où $\overrightarrow{BD} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{BG}$. Ainsi les points B, D et G sont alignés.		
	Total $\longrightarrow$	**5 points**	
E3	Réponse	Points	Obtenus
A.1.a	On appelle u_n la masse, en gramme, des bactéries présentes dans la cuve, et n représente le nombre de jours depuis le début du processus. On a donc $u_0 = 1\,000$ puisqu'initialement, on introduit 1 kg soit 1 000 grammes de bactéries. D'un jour à l'autre, le nombre de bactéries augmente de 20 %, c'est donc qu'il est multiplié par $1 + \dfrac{20}{100} = 1,2$. Chaque jour, en remplaçant le milieu nutritif, on perd 100 grammes de bactéries. Donc, pour tout n, $u_{n+1} = 1,2\,u_n - 100$ avec $u_0 = 1\,000$.		
A.1.b	On cherche le plus petit entier n tel que $u_n > 30\,000$. À la calculatrice, on trouve $u_{22} \approx 28\,103$ et $u_{23} \approx 33\,624$; donc on dépasse 30 kg de bactéries à partir de 23 jours.		

A.1.c	On complète l'algorithme :
	Variables : u et n sont des nombres
	Traitement :
	u prend la valeur 1 000
	n prend la valeur 0
	Tant que $u \leqslant 30\,000$ faire
	    u prend la valeur $1,2 \times u - 100$
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
	Sortie : Afficher n		

A.2.a	Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n \geqslant 1\,000$. • $u_0 = 1\,000 \geqslant 1\,000$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$. • On suppose la propriété vraie pour un rang quelconque $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_p \geqslant 1\,000$. $u_{p+1} = 1,2\,u_p - 100$; $u_p \geqslant 1\,000$ donc $1,2\,u_p \geqslant 1\,200$ donc $1,2\,u_p - 100 \geqslant 1\,100$. Donc $1,2\,u_p - 100 \geqslant 1\,000$ et on a démontré que la propriété était vraie au rang $p+1$. • La propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc d'après le principe de récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$. Pour tout n, $u_n \geqslant 1\,000$.		
A.2.b	Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 1,2\,u_n - 100 - u_n = 0,2\,u_n - 100$ Or, pour tout n, $u_n \geqslant 1\,000$ donc $0,2\,u_n \geqslant 200$ et donc $0,2\,u_n - 100 \geqslant 100$ On a donc démontré que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$. On peut donc dire que la suite (u_n) est croissante.		
A.3.a	$v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1,2\,u_n - 100 - 500 = 1,2(v_n + 500) - 600 = 1,2\,v_n + 600 - 600 = 1,2\,v_n$ $v_0 = u_0 - 500 = 1\,000 - 500 = 500$ Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $v_0 = 500$.		
A.3.b	On déduit de la question précédente que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1,2^n$. Comme, pour tout n, $u_n = v_n + 500$, on en déduit que $u_n = 500 + 500 \times 1,2^n$.		
A.3.c	La suite (v_n) est géométrique de raison 1,2 et de premier terme positif ; or $1,2 > 1$ donc, d'après le cours, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$. Pour tout n, $u_n = v_n + 500$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.		
B.1.a	$f(0) = \dfrac{50}{1 + 49\mathrm{e}^0} = \dfrac{50}{1 + 49} = 1$.		
B.1.b	Pour tout t, $\mathrm{e}^{-0,2t} > 0$ donc $1 + 49\mathrm{e}^{-0,2t} > 1$ et donc $\dfrac{1}{1 + 49\mathrm{e}^{-0,2t}} < 1$ On en déduit que $\dfrac{50}{1 + 49\mathrm{e}^{-0,2t}} < 50$ et donc que, pour tout t, $f(t) < 50$.		

B.1.c	La fonction $t \longmapsto -0,2t$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-0,2t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $t \longmapsto 1+49\mathrm{e}^{-0,2t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. La fonction inverse est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc, par composition, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+49\mathrm{e}^{-0,2t}}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. On en conclut que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\ ;\ +\infty[$.		
B.1.d	$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -0,2t = -\infty$; on pose $T=-0,2t$. Or $\displaystyle\lim_{T\to-\infty} \mathrm{e}^T = 0$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,2t} = 0$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 1+49\mathrm{e}^{-0,2t} = 1$ et donc que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 50$.		
B.2.	On sait que $f(t)$ représente la masse, en kg, de bactéries au temps t, exprimé en jours. • $f(0)=1$ signifie que la masse des bactéries à l'instant $t=0$ est de 1 kg ; • $f(t)<50$ pour tout t signifie que la masse de bactéries dans la cuve sera toujours inférieure à 50 kg ; • f est croissante signifie que la masse de bactéries augmente régulièrement au fil du temps ; • $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 50$ signifie que la masse de bactéries dans la cuve va se rapprocher de 50 kg.		
B.3.	La fonction f est continue sur $[0[;+\infty[$ (compositon, somme et quotient de fonctions continues) ; f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. 30 appartient à $f([0;+\infty[)$ donc d'après le théorème de la bijection il existe un unique $t_0>0$ tel que $f(t_0)=30$. En utilisant la calculatrice, on trouve un encadrement de t_0 d'amplitude 0,1 : $\boxed{21,4<t_0<21,5}$ $(f(21,4)<30$ et $f(21,5)>30)$. Comme f est strictement croissante sur $[0+\infty[$, $f(t)>30 \Leftrightarrow t>t_0$. Donc on en conclut que la masse de bactéries dépassera 30 kg au bout de 22 jours.		
	Total $\longrightarrow$	**points**	
	Total $\longrightarrow$	**6+1 points**	