

Soit ϕ la fonction définie sur \mathbb{R}^* par :

$$\phi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{1/x} + 1$$

1. On admet que ϕ est dérivable sur tout intervalle inclus dans \mathbb{R}^* .

Prouver que pour tout $x \neq 0$, $\phi'(x) = -\left(\frac{2x+1}{x^3}\right) e^{1/x}$.

2. Étudier le signe de la dérivée $\phi'(x)$ et rassembler les résultats dans un tableau.

3. En déduire les variations de ϕ et le signe de $\phi(x)$ sur \mathbb{R}^* . (*il faudra pour cela calculer des limites*)

4. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}$$

En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer les variations de f dans \mathbb{R}^* .