NOM : **CLASSE :**

EXERCICE 1 (*8 points*)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 10 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3 + \sqrt{0,5u_n^2 - 7}.$$

1. Soit f la fonction définie sur $[4;+\infty[$ par $f(x) = 3 + \sqrt{0,5x^2 - 7}$.
   (a) Étudier les variations de f sur $[4;+\infty[$.
   Dresser le tableau de variations complet de f (dans lequel figure donc la limite de $f(x)$ en $+\infty$).
   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $8 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 10$.
   (c) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et prouver que la suite (u_n) est convergente.
2. Pour déterminer le plus petit entier n pour lequel $u_n < 8,001$, un élève propose l'algorithme suivant :

```
▷ Variables
n est un entier naturel
u est un réel
Initialisation
Affecter à n la valeur 0
Affecter à u la valeur 10
▷ Traitement
Tant que ............
   Affecter à u la valeur ............
   ........................
Fin tant que
▷ Sortie
Afficher la variable n
```

Compléter ci-contre les pointillés et la ligne manquante dans l'algorithme.

Quelle est la valeur de n en sortie d'algorithme ?

• ○ • ○ •

EXERCICE 2 (*6 points*)

1. Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'équation $(-2\cos(x) - 1)(2\sin(2x) + \sqrt{3}) = 0$.

2. Une fonction f est définie sur $]-\pi;\pi]$ et on sait que $f'(x) = 2\cos(x) + 1$ pour tout x de $]-\pi;\pi]$.
   Déterminer les variations de f sur $]-\pi;\pi]$.
   Bonus : Donner une expression possible de la fonction f. Est-il possible de la choisir pour que $f(0) = 1$?
   Pour cette question on précise que $\cos'(x) = -\sin(x)$ et que $\sin'(x) = \cos(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

• ○ • ○ •

EXERCICE 3 (*6 points*)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On écrira les solutions sous forme algébrique :

1. $4\mathrm{i}z + 2\mathrm{i} = 1 - z + \mathrm{i}$
2. $z + 2\mathrm{i}\overline{z} = 1 + 3\mathrm{i}$
3. $-2z^2 + 3z - 4 = 0$

• ○ • ○ •

EXERCICE 4 (*10 points*)

1. Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x) = 4x\sqrt{x} - 5$
   (a) Montrer que pour tout x de $[1;+\infty[$ on a $g'(x) = 6\sqrt{x}$.
   En déduire le sens de variation de g sur$[1;+\infty[$.
   (b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
   (c) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 1,16 et 1,17.
   (d) En déduire le signe de g sur $[1;+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 3 - 5\sqrt{x}$.
   (a) Vérifier que, pour tout x de $[1;+\infty[$, $f(x) = x\left(x - \dfrac{5}{\sqrt{x}}\right) - 3$.
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (c) Vérifier que, pour tout x de $[1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2\sqrt{x}}$ où g est la fonction de la question 1.
   (d) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[1;+\infty[$.
   (e) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en le point d'abscisse 4.