EXERCICE 1 (*points*)

On considère une fonction f définie sur $[0; +\infty[$.

Cette fonction vérifie

$$\text{pour tout } x \geqslant 1, \quad \frac{x-1}{x} \leqslant 2f(x) - 5 \leqslant 1 + \frac{1}{x^2}$$

Déterminer, si possible, la limite de $f(x)$ en $+\infty$ en justifiant votre réponse.

• ◯ • ◯ •

EXERCICE 2 (*points*)

Soit f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2; 3\}$ par $f(x) = \dfrac{5 - x^2}{x^2 - x - 6}$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Justifier l'ensemble de définition de f.

2. Montrer que $\mathcal{C}_f$ possède la même asymptote horizontale Δ en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x>3}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x<3}} f(x)$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?

4. On considère la fonction d définie par $d(x) = f(x) + 1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-2; 3\}$.
   Simplifier $d(x)$ et déterminer le signe de $d(x)$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-2; 3\}$.
   En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ en $+\infty$ et en $-\infty$.

• ◯ • ◯ •

EXERCICE 3 (*points*)

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = (x-1)^3\sqrt{x}$.

il est rappelé que si $g = uv$ sur un intervalle I et que u et v sont toutes les deux dérivables sur I, alors g est dérivable sur I et $g' = u'v + uv'$.

1. Justifier que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$,
$$g'(x) = \frac{(x-1)^2(7x-1)}{2\sqrt{x}}$$

2. Compléter le tableau de variations de la fonction g

x	0		$\cdots$		$\cdots$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$+$	
Variations de g	0	↘	$\cdots$	↗	0	↗	$\cdots$

3. **BONUS :** Justifier les signes de la dérivée dans le tableau de variations.