EXERCICE 1 *Produit matriciel*

Trois étudiants e_1, e_2 et e_3 passent quatre épreuves
(E_1 : Mathématiques , E_2 : Physique , E_3 : Chimie et E_4 : Culture générale).

Deux concours C_1 et C_2 se basent sur les notes des ces quatre épreuves mais avec des coefficients différents.

La matrice des notes est $N = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 13 & 15 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 15 & 13 & 13 & 6 \end{pmatrix}$ où n_{ij} est la note de l'étudiant e_i à l'épreuve E_j.

La matrice des coefficients est $Q = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 4 \\ 4 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ où q_{ij} est le coefficient de l'épreuve E_i au concours C_j.

1. Exprimer, à l'aide de N et de Q, la matrice T du total des points de ces étudiants au deux concours. Puis la calculer.
2. Déterminer la matrice D telle que TD représente la moyenne de chaque étudiant aux deux concours. Calculer ces moyennes.

EXERCICE 2 *Système et matrice*

On considère le système suivant : $(S) \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 4z = 50 \\ 3x + 5y - 4z = 2 \\ 4x + 7y - 2z = 31 \end{array} \right.$

1. Écrire (S) sous la forme d'un produit matriciel $AX = B$. $((X, B) \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})^2\,;\, A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$
2. Déterminer A^{-1} à la calculatrice.
3. Déterminer la solution du système (S).

EXERCICE 3 *Propriétés du produit matriciel*

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer J^2
2. Déterminer les réels a et b tels que $A = aJ + bI_2$
3. En déduire le calcul de $A \times A$
   (a) directement
   (b) en utilisant le résultat précédent

EXERCICE 4 *Récurrence et matrice*

On pose $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Exprimer A en fonction de I_2 et de N.
2. Calculer la matrice N^2 et en déduire, à partir de la question 1., une expression de A^2 en fonction de I_2 et de N.
3. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel k, $A^k = (-3)^k I_2 + k(-3)^{k-1}N$. Donner alors l'écriture de A^k.